Нэг. Зах зээлийн эрсдлийг хэмжих (тооцоолох)

1.1. Үндсэн ойлголтууд

Банкны үйл ажиллагаанд зээлийн, зах зээлийн, үйл ажиллагааны, төлбөрийн чадварын эрсдэлүүд бусад эрдлийн төрлүүдтэй харьцуулахад их хэмжээгээр гардаг. Эдгээрээс гадна банкинд нэр хүндийн, хуулийн, улс орны, улс төрийн гэх зэрэг олон төрлийн эрсдэлүүд байдаг боловч ихэнх эрсдлийн төрлүүдийг тооцоолон хэмжих боломж бага байдаг. Зээлийн эрсдэл нь банкинд хамгийн өндөр хувийг эзэлдэг боловч үйл ажиллагааны, зах зээлийн эрсдэл нь бусад эрсдэлүүдтэй харьцуулахад их хэмжээний алдагдал хүлээлгэх магадлал ихтэй тул эдгээр эрсдлийг хэмжих, хянах чухал ач холбогдолтой юм. Basel-ийн Хяналт шалгалтын хорооноос 1998 онд өмнө гаргасан эрсдлийг хянах зарчмууд нь ирээдүйд тодорхой хугацаанд гарч болзошгүй зээлийн эрсдлийг тодорхойлох, уг эрсдлийг банкны өөрийн хөрөнгөөр нөхөх чадварыг илэрхийлэх үзүүлэлтийг тогтооход чиглэж байсан бол 2001 онд шинэчлэн гаргасан зарчим буюу Basel II-д зээлийн эрсдэлээс гадна зах зээл, үйл ажиллагааны эрсдэлд өмнөх хувилбараасаа илүү анхаарал хандуулж, эдгээр эрсдлийг хэмжих, банкны үйл ажиллагаанд үүсч болзошгүй алдагдлыг өөрийн хөрөнгөөр нөхөх чадвартай эсэхийг тогтооход чиглэгдсэн.

Банкны эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг тодорхойлогч гол хүчин зүйлс нь аливаа санхүүгийн бүтээгдэхүүний үнэ, хүүгийн түвшин, тэдгээрийн стандарт хазайлт, хугацаа зэрэг байдаг. Өөрөөр хэлбэл санхүүгийн хэрэгсэл буюу бүтээгдэхүүний үнэлгээг үнэ, хугацаа зэрэг хүчин зүйлсээс хамаарсан функц (үнэлгээний функц) хэлбэрээр илэрхийлж болно. Эдгээр хүчин зүйлсийн хэлбэлзлээс банкны эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнд өөрчлөлт орох ба үүний дүнд банк алдагдал хүлээж болзошгүй болдог. Зах зээлийн эрсдлийг энгийн байдлаар тодорхойлбол “***зах зээлийн эрсдэл гэдэг нь банкны эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг тодорхойлогч хүчин зүйлсийн ирээдүйд гарч болзошгүй өөрчлөлтөөс шалтгаалан тухайн санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнд орох өөрчлөлтөөс банкны хүлээж болзошгүй алдагдлыг хэлнэ”.***

Статистик болон магадлалын онолд аливаа хэмжигдэхүүний нэрлэсэн хэмжээг бус түүний харьцангуй өөрчлөлтийг авах нь үнэлгээ хийхэд хялбар байдаг тул зах зээлийн эрсдэл тооцоолоход харьцангуй хэмжигдэхүүнийг авдаг. Иймд зах зээлийн эрсдлийг тооцоолоход үнийн өөрчлөлтийг ихэвчлэн харьцангуй өөрчлөлт хэлбэрээр авч, үнэлгээний функцийг ашиглан санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний өөрчлөлтийг гаргадаг. Харьцангуй өөрчлөлтийг 2 хэлбэрээр авч үздэг. Үүнд:

1) харьцангуй өөрчлөлт-Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ болон санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнд нөлөөлөгч хүчин зүйлсийн нэрлэсэн хэмжигдэхүүний өөрчлөлтийг нэрлэсэн дүнд харьцуулсан харьцаа.

2) log харьцангуй өөрчлөлт-Үүнийг авах гол үндэс нь хүүг тасралтгүй хуримтлуулах хийсвэр санаанаас гарч ирэх бөгөөд тухайн үеийн нэрлэсэн дүнг өмнөх үеийн нэрлэсэн дүнд харьцуулсан харьцаанаас (энэ нь харьцангуй өөрчлөлтийн нэг хэлбэр) натураль log буюу ln авсан хэмжигдэхүүн.

Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг үнээс хамааруулан $y = f(X)$ (үүнд $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вектор ба x_i нь хүчин зүйлс буюу үнэ, хугацаа. Тухайн тохиолдолд энэ нь зөвхөн нэг хэмжээст вектор буюу зөвхөн харгалзах зах зээлийн үнээс хамаарсан функц хэлбэртэй байна) гэсэн хэлбэртэй бичвэл зах зээлийн эрсдлийг хэмжихийн тулд уг функцээс X -ээр авсан уламжлалуудын санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнд нөлөөлөх нөлөөллийг тогтоох шаардлагатай болдог.

Гэвч үнэлгээний функцийг тухайн хэлбэрээр авснаар тооцоололд хүндрэл гарахаас зайлсхийх үүднээс үнэлгээний функцийг Тейлорын томьёо (цуваа)-оор задлах буюу тухайн функцэд олон гишүүнт хэлбэрээр дөхөж, түүнээс хүчин зүйлсээр авсан уламжлалуудын нөлөөлөл болон санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт ба хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийн хоорондын хамаарлыг тодорхой алдаатайгаар буюу ойролцоогоор гаргаж авдаг. Тейлорын цуваагаар $f(x)$ нь нэг хувьсагчтай буюу хүчин зүйлсээс хамаарсан байдал $x = x^{'}$ цэгийн орчинд дараахь хэлбэртэй байна.

$$f(x) = f(x^{'}) + \frac{f^{'}(x^{'})}{1!}(x - x^{'}) + \frac{f^{''}(x^{'})}{2!}(x - x^{'})^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x^{'})}{n!}(x - x^{'})^n + R_n^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x^{'})}{k!}(x - x^{'})^k + R_n^*$$

Эндээс $f(x) - f(x^{'}) \approx f^{'}(x^{'})(x - x^{'})$ буюу санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ болон хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлтийг харгалзан $r^{'}, r$ гэж тэмдэглэвэл $r^{'} = \frac{f^{'}(x^{'}) \cdot x^{'}}{f(x^{'})} \cdot r$ болно. Хэрэв хоёр болон түүнээс дээд эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл маш бага гэж үзвэл $\frac{f^{'}(x^{'}) \cdot x^{'}}{f(x^{'})}$ нь ерөнхийдөө тогтмол тоо буюу скаляр үржвэр байна.

Дээрх хэлбэр нь санхүүгийн үнэлгээ зөвхөн нэг хүчин зүйлсээс хамаарсан (хялбаршуулсан байдлаар авч үзэхэд) тохиолдолд хэрэглэгдэнэ. Цогц хэлбэртэй санхүүгийн хэрэгсэл тухайлбал option-ийн үнэлгээг хугацаа, санхүүгийн үндсэн хэрэгслийн үнэлгээ, түүний стандарт хазайлт зэрэг хүчин зүйлсээс хамааруулан судалдаг. Энэ тохиолдолд Тейлорын цувааг $f(x)$ функц олон хүчин зүйлс буюу хувьсагчдаас хамаарсан тохиолдолд хэрэглэх шаардлагатай. Функц олон хувьсагчаас хамаарсан тохиолдолд Тейлорын цувааг 2 хувьсагчийн хувьд $x_1 = x_1^{'}, x_2 = x_2^{'}$ цэгийн орчинд илэрхийлбэл дараахь хэлбэртэй байна.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^{'}, x_1^{'}) + \frac{1}{1!}\left(\frac{f_{x_1}^{'}(x_1^{'}, x_2^{'})}{1!}(x_1 - x_1^{'}) + \frac{f_{x_2}^{'}(x_1^{'}, x_2^{'})}{1!}(x_2 - x_2^{'}) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{f_{x_1x_1}^{''}(x_1^{'}, x_2^{'})}{2!}(x_1 - x_1^{'})^2 + 2\frac{f_{x_1x_2}^{''}(x_1^{'}, x_2^{'})}{2!}(x_1 - x_1^{'})(x_2 - x_2^{'}) + \frac{f_{x_2x_2}^{''}(x_1^{'}, x_2^{'})}{2!}(x_2 - x_2^{'})^2 \right) + \ldots + R_n^*$$

Ихэнх тохиолдолд үнэлгээний функцаас хүчин зүйлсээр авсан нэгээс дээд эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл маш бага буюу бараг байдаггүй боловч санхүүгийн зарим цогц хэрэгсэл тухайлбал option-ийн хувьд хоёрдугаар зэрэглэлийн уламжлалын нөлөөлөл гардаг. Хоёр болон түүнээс дээш зэрэглэлийн уламжлалийн нөлөөлөл маш бага буюу тэгтэй ойролцоо тохиолдолд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт ба хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлт хоёрын хооронд Тейлорын цуваагаар шугаман хамааралтай болохыг дээр харуулсан. Харин хоёр болон түүнээс дээш зэргийн уламжлалын нөлөөлөл байгаа нөхцөлд шугаман бус хамааралтай байдаг. Үнэлгээний функцийн хоёроос дээшхи эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл маш бага байдаг тул голчлон нэг болон хоёрдугаар зэрэглэлийн уламжлалын нөлөөллийг авдаг. Хэрэв option-ийн үнэлгээний функц $y = f(x, X, t, \rho, \sigma)$ (үүнд x -option хийгдсэн санхүүгийн хэрэгслийн буюу санхүүгийн үндсэн хэрэгслийн үнэлгээ, X -strike үнэ, t-хугацаа, σ -санхүүгийн үндсэн хэрэгслийн үнэлгээний стандарт хазайлт) бол олон хувьсагчийн функцийн Тейлорын цуваагаар дараахь байдлаар үнэлгээний функцийг илэрхийлдэг.

$$f(x,X,t,\rho,\sigma) = f(r,X,t_1,\rho,\sigma) + \frac{f_x'(r,X,t_1,\rho,\sigma)}{1!}(x - x') + \frac{f_t'(r,X,t,\rho,\sigma)}{1!}(t - t') + \frac{f_{xx}''(r,X,t_1,\rho,\sigma)}{2!}(x - x')^2$$

буюу $f(x,X,t,\rho,\sigma) = f(r,X,t_1,\rho,\sigma) + \delta(x - x') + \theta(t - t') + \frac{\Gamma}{2!}(x - x')^2$ болно. Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ болон x хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлтийг харгалзан r', r гэвэл $\frac{y - y'}{y'} \cdot \frac{y'}{x'} = \delta \frac{(x - x')}{x'} + \frac{\Gamma}{2} \cdot x' \cdot \frac{(x - x')^2}{x'^2} + \frac{\theta}{x'}(t - t')$ буюу

$$r' = \frac{x'}{y'}\delta r + \frac{x'}{y'}\frac{\Gamma}{2} \cdot x' \cdot r^2 + \frac{\theta}{y'}(t - t')$$

Уг илэрхийллийг хураангуйлан бичвэл $r' = \tilde{\delta} r + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma} r^2 + \tilde{\theta}(t - t')$ байна. Өөрөөр хэлбэл хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл байгаа нөхцөлд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт, x хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийн хооронд шугаман бус буюу квадрат хэлбэрийн хамаарал байна.

Цаашид дараахь нэр томьёололыг дор дурьдсанаар авч хэрэглэнэ. Үүнд:

- ***үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт*** -үнэлгээний функцийн авч байгаа утга буюу санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт
- ***үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт***[1]-үнэлгээний функцийн хувьсагч буюу хүчин зүйлсийн харьцангуй өөрчлөлт (товчоор үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт). Цаашид ерөнхийдөө үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт гэж үнэлгээний функцийн гол хүчин зүйл болох үнийн харьцангуй өөрчлөлтийг ойлгоно.
- ***delta нөлөөлөл***-үнэлгээний функцийг Тейлорын цуваанд задлан үнэлгээний болон үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийг хураангуйлан ялгасан хэлбэрт оруулсан илэрхийлэл дэх нэгдүгээр эрэмбийн уламжлалыг агуулсан нэмэгдэхүүний үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтөөс бусад үржигдэхүүн.
- ***gamma нөлөөлөл***-дээр буюу 3-т заасан хэлбэрт байгаа илэрхийлэл дэх хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалыг агуулсан нэмэгдэхүүний үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтөөс бусад үржигдэхүүн.
- ***багц***-арилжааны зорилгоор эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслүүд
- ***багцын үнэлгээ***-арилжааны зорилгоор эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслүүдийн үнэлгээний нийлбэр.
- ***санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгсэл***-санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцийг Тейлорын цуваагаар задлахад үндсэн хувьсагчаар авсан нэгээс дээд эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл байхгүй буюу тэг байх санхүүгийн хэрэгсэл.
- ***санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгсэл***-санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцийг Тейлорын цуваагаар задлахад үндсэн хувьсагчаар авсан нэгээс дээд эрэмбийн, тухайлбал хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл байгаа санхүүгийн хэрэгсэл (уламжлагдсан санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ нь зарим энгийн санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнээс хамаардаг).

Тэмдэглэгээг дор тайлбарласан байдлаар эрсдлийн аргачлалуудад хэрэглэсэн[2]. Үүнд:

---

[1] Зарим тохиолдолд буюу option-ийн үед энэ нь зарим санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ байж болно.

[2] Тухайн аргачлалтай холбогдон гарч байгаа шинэ тэмдэглэгээг аргачлал тус бүрийн өмнө нь тайлбарлан оруулсан болно.

$x_{i,t}$-Санхүүгийн i хэрэгсэлд харгалзах үндсэн хувьсагчийн хугацааны t үе дэх хэмжээ

$y_{i,t}$-Санхүүгийн i хэрэгслийн хугацааны t үе дэх нэрлэсэн хэмжээ буюу үнэлгээ

$y_{p,t}$-багцын хугацааны t үеийн үнэлгээ

$X_{i,t}$-$x_{i,t}$ хэмжигдэхүүний харьцангуй өөрчлөлт

$Y_{i,t}$- $y_{i,t}$ хэмжигдэхүүний харьцангуй өөрчлөлт

$Y_{p,t}$-$y_{p,t}$ хэмжигдэхүүний харьцангуй өөрчлөлт

$\sigma_{i,t}$-$X_{i,t}$ хэмжигдэхүүний стандарт хазайлт буюу хэлбэлзэл ($\sigma^2_{i,t}$-$X_{i,t}$ хэмжигдэхүүний вариац)

$\sigma^2_{ij,t}$-$X_{i,t}$ болон $X_{j,t}$ хэмжигдэхүүний ковариац

$\sigma_{p,t}$-багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн хугацааны t үеийн стандарт хазайлт

p'-p итгэх магадлалд хамаарах стандарт нормаль тархалтын утга[3].

$N(0,\sigma)$- Тэг дундажтай, σ_i-стандарт хазайлттай нормаль тархалтын нягтын функц

$N(0,1)$- Тэг дундажтай, нэгж стандарт хазайлттай буюу стандарт нормаль тархалтын нягтын функц

$\rho_{ij,t}$-$X_{i,t}$ болон $X_{j,t}$ хэмжигдэхүүний корреляци буюу хамаарлын коэффициент

ρ - Корреляцийн матриц

$\omega_{i,t}$-Санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний багцын үнэлгээнд эзлэх хувь

Σ_t-багцын хугацааны t үеийн ковариацын матриц

δ_i -Санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас $x_{i,t}$-ээр авсан нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал

$\tilde{\delta}_i$ - Тейлорын цуваан дахь санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас $x_{i,t}$-ээр авсан нэгдүгээр эрэмбийн уламжлалыг агуулсан нэмэгдэхүүн

Γ_i - Санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас $x_{i,t}$-ээр авсан хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал

$\tilde{\Gamma}_i$ - Тейлорын цуваан дахь санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас $x_{i,t}$-ээр авсан хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалыг агуулсан нэмэгдэхүүн

θ - Санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас хугацаагаар авсан нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал

$\tilde{\theta}$ - Тейлорын цуваан дахь санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний функцаас хугацаагаар авсан уламжлалыг агуулсан нэмэгдэхүүн

Дараахь хүснэгтэд санхүүгийн гол хэрэгслүүдийг тэдгээрийн үндсэн хувьсагчаас хамаарах байдлаар ангилан үзүүлэв.

Д/д	Санхүүгийн хэрэгслүүд	Үндсэн хувьсагч
1.	***Санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгслүүд***	
1.1.	*Санхүүгийн шугаман хамааралтай энгийн хэрэгслүүд*	
	Өрийн бичиг	Өрийн бичгийн үнэ
	Үнэт цаас	Тухайн зах зээлийн индекс
	Гадаад валютын арилжаа	Гадаад валютын ханш
	Бараа бүтээгдэхүүн	Бараа бүтээгдэхүүний үнэ
	Хүүгийн swap	Swap үнэ
1.2.	*Санхүүгийн шугаман хамааралтай уламжлагдсан хэрэгслүүд*	

[3] Ерөнхийдөө тухайн хэмжигдэхүүний нягтын функцээс хамааран p магадлалд хамаарах хэмжигдэхүүний авах утга

	Хувьсах хүүтэй өрийн бичиг	Мөнгөний захын үнэ
	Гадаад валютын forward	Гадаад валютын ханш
	Forward хүүгийн хэлцэл	мөнгөний захын үнэ
	Валютын swap	Swap үнэ/гадаад валютын ханш
2.	***Санхүүгийн шугаман хамаарал бус хамааралтай уламжлагдсан хэрэгслүүд***	
	Үнэт цаасны option	Үнэт цаасны үнэ
	Өрийн бичгийн option	Өрийн бичгийн үнэ
	Гадаад валютын option	Гадаад валютын ханш

Зах зээлийн эрсдэл тооцоолох аливаа аргачлалд үндсэн хувьсагчийг ихэвчлэн нормаль тархалтай байдлаар авдаг. Үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт мөн нормаль тархалттай байх ба аргачлалд харьцангуй өөрчлөлтийг авснаар гол давуу тал нь түүний хүлээгдэж байгаа утга буюу дундаж нь тэг байна. Өөрөөр хэлбэл $X_{i,t} : N(0,\sigma_i)$. Иймд үндсэн хувьсагчийг нормчлох буюу стандарт нормаль тархалтад $X_{i,s} = X_i / \sigma_i$ ($X_{i,s}$ - стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүн, r_i - нормаль тархалттай хэмжигдэхүүн, σ_i - X_i хэмжигдэхүүний стандарт хазайлт) байдлаар шилжүүлнэ. (Хэрэв хүлээгдэж байгаа утга нь тэгээс ялгаатай μ_i гэсэн хэмжигдэхүүн байвал стандарт нормаль тархалтад $X_{i,s} = (X_i - \mu_i)/\sigma_t$ байдлаар шилжүүлэх бөгөөд энэ тохиолдолд багц олон тооны санхүүгийн хэрэгслээс бүрдэж байгаа үед тооцоолол хийхэд илүү хүндрэлтэй болох нь харагдаж байна.) Эндээс p итгэх магадлалтайгаар $X_{i,s}$ хэмжигдэхүүний авах утга нь стандарт нормаль тархалтын урвуу функцээр тодорхойлогдох бөгөөд $VaR(X_{i,s})$ буюу p' гэж тэмдэглэвэл X_i-ийн p итгэх магадлалтайгаар авах утга нь нормаль тархалтыг стандарт нормаль тархалтад дээрх байдлаар нормчилсон байдлаас $VaR(X_i) = p' \cdot \sigma_i$ болно. Итгэх магадлал p-г 1%-10% хооронд, ихэвчлэн 1%, 5%-аар авдаг бөгөөд энэ нь аргачлалд гадаад хэмжигдэхүүн байдлаар ашиглагдана.

1.1.1.Санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгсэл

Хэрэв $X_{i,t}$-г санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгслийн үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт гэж авбал Тейлорын цуваанаас санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нь мөн нормаль тархалттай байх ба p итгэх магадлалтайгаар санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний нэгж хугацааны дараа (хугацааны $t+1$ үед) авч болох хамгийн их өөрчлөлт буюу эрсдэл $VaR(X_{i,t+1}) = p' \cdot \sigma_i \cdot Y_{i,t}$ ($X_{i,t}$-нь санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ) байна.

Санхүүгийн ихэнх шугаман хамааралтай хэрэгслүүдийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт болон үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийн хооронд 1:1 хамаарал байдаг хэдий ч зарим тохиолдолд буюу аргачлалд тасралтгүй хуримтлуулах хэлбэрийг авахад үнэлгээний функцээс нэгдүгээр эрэмбээр авсан уламжлал болох delta нөлөөлөл нь тогтмол хэмжигдэхүүн байдаггүй буюу хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал тэгээс эрс ялгаатай байдаг. ***Энэ нөхцөлд дээрх байдлаар эрсдлийг тооцоолбол бодит байдлаас их алдаатай гардаг.*** Иймд тасралтгүй хуримтлуулах хэлбэрийг аргачлалд авч үзэж байгаа бол эрсдлийг санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгслийн эрсдлийг тооцоолох хэлбэрийг ашиглах шаардлагатай.

Банк эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслүүдийн эрсдлийг тус тусад нь тооцоолохоос гадна багцын эрсдлийг тооцоолох нь илүү чухал ач холбогдолтой. Үүний тулд санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн багцын үнэлгээнд эзлэх хувь хэмжээ (

$\omega_{i,t}$-багцын үнэлгээнд i санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний эзлэх хувь, ω_t-нь гишүүд нь $\omega_{t,i}$ $(i = 1,...,n)$-ээс бүрдэх вектор буюу баганан матриц) болон багцад хамаарах санхүүгийн хэрэгслүүдийн үндсэн хувьсагчдын хоорондын хамаарлын нөлөөллийг аргачлалд оруулах шаардлагатай. Эдгээр нөлөөллийг оруулснаар тооцоолсон багцын эрсдэл санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн эрсдлүүдийн нийлбэрээс бага (зарим тохиолдолд их) гарах нөхцлийг бүрдүүлдэг. Иймд багцын эрсдлийг тооцоолох үед үндсэн хувьсагчдын хоорондын хамаарлын матриц ρ_t (гишүүд нь i, j санхүүгийн хэрэгслийн хоорондын корреляцийн коэффициент $\rho_{t,ij}$ $(i, j = 1,...,n)$-ээс бүрдэх тэгш хэмтэй мартриц) буюу нормчлоогүй байдлаараа ковариацын матриц Σ_t (гишүүд нь i, j санхүүгийн хэрэгслийн ковариац $\sigma_{ij,t}$ $(i, j = 1,...,n)$-ээс бүрдэх тэгш хэмтэй матриц)-ыг тооцоолох шаардлагатай.

1.1.2. Санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгсэл

Санхүүгийн хэрэгсэл шугаман бус хамааралтай байхад түүний үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нь үнэлгээний функцаас авсан хоёрдугаар зэргийн уламжлалын нөлөөллөөс шалтгаалан үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлттэйгөө ижил нормаль тархалттай байдаггүй. Иймээс үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн тархалтын хэлбэрийг олж түүнээс тодорхой итгэх магадлалтайгаар үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн авч болох хамгийн их утгыг олдог.

Банкны эзэмшиж байгаа багц тодорхой тооны санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгсэл агуулж байгаа бол багцын эрсдлийг тооцоолох асуудал зөвхөн санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгслээс бүрдсэн багцын эрсдэл тооцоолохоос ялгаатай байна. Өөрөөр хэлбэл багцын эрсдэл тооцоолоход gamma нөлөөллийг оруулсан байх шаардлага гардаг.

1.2. Эрсдэл тооцоолох энгийн аргачлал

1.2.1. Historical simulation

Уг аргачлалын үндсэн санаа нь хугацааны $t+1$ үе дэх үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн тархалт нь түүний өнгөрсөн m үеийн (өөрөөр хэлбэл $t, t-1,..., t-m+1$) ажиглалтын утгуудын тархалттай ойролцоо буюу ижил байна гэж авдаг. Санхүүгийн i хэрэгслийн хувьд өнгөрсөн үеийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн ажиглалтын утгын олонлог дараахь байдалтай байна.

$$\left\{ X_{i,t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^{m}$$

p-итгэх магадлалтайгаар санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн авч болох хамгийн их утгыг дээрх олонлогийн тодорхой интервальд гарах давтамжийг байгуулан олно. Энэ нь дараахь байдалтай байна.

$$VaR_{i,t+1} = -\text{Percentile}\left\{ \left\{ X_{i,t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^{m}, p \right\}$$

Дээрх байдлаар багцын эрсдлийг тооцоолоход нэг санхүүгийн хэрэгслийн хувьд аргачлалыг хэрэглэсэнтэй ижил байдлаар буюу багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн өнгөрсөн үеийн ажиглалтын утгыг шууд олонлог болгон авдаг ба ингэснээрээ эрсдэл тооцоолох бусад аргачлалуудтай харьцуулахад санхүүгийн хэрэгслүүдийн хоорондын хамаарлыг тооцоолох шаардлагагүй байдаг. Багцын өнгөрсөн үеийн ажиглалтын утгуудын олонлогийг гаргахдаа хугацааны үе бүрийн санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийг тухайн багцын үнэлгээнд эзлэх хувиар жигнэн нийлбэрчлэн дараахь байдлаар гаргана.

$$\left\{ X'_{p,t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^{m} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_i X_{i,t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^{m}$$

Эндээс багцын харьцангуй өөрчлөлт нь p-итгэх магадлалтайгаар хугацааны $t+1$ үед хамгийн ихдээ дараахь байдалтай байна.

$$VaR_{p,t+1} = -Percentile\left\{ \left\{ X_{p,t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^{m}, p \right\}$$

Аргачлалын онцлог тал нь параметр ашиглагдахгүй буюу параметр үнэлэх болон санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ, түүний үндсэн хувьсагчийн хоорондын хамаарлыг буюу үнэлгээний функцийг авч үзэх шаардлагагүй. Харин гол дутагдалтай тал нь m буюу ажиглалтын хэмжээг ямар хэмжээтэйгээр авах асуудал бөгөөд хэрэв m-ийг их хэмжээтэй авбал сүүлийн ажиглалтын нөлөөлөл бага болох бөгөөд ингэснээр тооцоолсон эрсдлийн хэмжээ тогтвортой байх хандлагатай болдог. Нөгөө талаас m-ийг бага хэмжээтэй авахад эрсдлийн үнэлгээнд хугацааны өмнөх тодорхой үед гарсан үндсэн хувьсагчийн их хэмжээний өөрчлөлтийн нөлөөлөл орохгүй байж болох ба ингэснээр үнэлэлт нарийн болж чаддаггүй. Энэ аргачлалыг хэрэглэж байгаа үед ихэнх тохиолдолд m-ийг 250 болон 1000-аар сонгон авдаг.

Энэ аргачлалд санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт болон багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийг нормаль тархалттай гэж үздэг буюу энэ байдлаараа Delta-Normal аргачлалын үндсэн санаатай ижил болно.

1.2.2. Delta-Normal аргачлал

Энэ аргачлалд нэгээс дээш эрэмбийн уламжлалын нөлөөллийг тэг буюу байхгүйгээр авдаг тул зөвхөн санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгсэл, түүнийг агуулсан багцын эрсдлийг тооцоолоход ашиглагдана. Эрсдэл тооцоолох ерөнхий үйлдэл нь нормаль тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг стандарт нормаль тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүнд шилжүүлэх үйлдэлтэй ижил. Иймээс үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт $X_{i,t}$ бол санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний $t+1$ хугацаан дахь хамгийн их өөрчлөлт буюу эрсдлийг p итгэх магадлалтайгаар дараах байдлаар тооцоолно.

$$VaR_{i,t+1} = p' \cdot \sigma_{i,t} \cdot Y_{i,t}$$

Энэ илэрхийллийн баруун талын эхний хоёр үржвэр нь үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийн нэгж хугацааны дараа буюу хугацааны $t+1$ үед p итгэх магадлалтайгаар авах хамгийн их утга буюу $X_{i,t+1}$ гарна. Аргачлалыг санхүүгийн шугаман хэрэгсэлд ашиглаж байгаа тул үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлт үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлттай тэнцүү байх тул $X_{i,t+1}$-ийг $Y_{i,t}$-ээр үржүүлэхэд $Y_{i,t+1}$-ийн p итгэх магадлалтай хамгийн их өөрчлөлтийн хэмжээ буюу эрсдэл гарна.

Банкны эзэмшиж байгаа багц зөвхөн санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгслээс бүрдэж байгаа бол энэ аргачлал нь багцын хувьд дараах хэлбэртэй байна.

$$\sigma^2_{p.t+1} = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t$$

Эндээс багцын эрсдлийн хэмжээг санхүүгийн нэг хэрэгслийн эрсдэл тооцоолсонтой ижил буюу нормаль тархалтыг стандарт нормаль тархалтад шилжүүлэх үйлдлийг ашиглан дараахь байдлаар тооцоолно.

$$VaR_{p,t+1} = p' \cdot \sigma_{p,t+1} \cdot Y_{p,t} .$$

Эрсдлийг дээрх байдлаар тооцоолохдоо багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нь нөхцөлт нормаль тархалттай гэж үзэх үндэслэлтэй үед хэрэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл дээрх тооцоололд багцын харьцангуй өөрчлөлтийг нөхцөлт нормал тархалттай гэж үздэг.

1.3. Эрсдэл тооцоолох динамик аргачлал

1.3.1. Exponancial Weighted Moving average аргачлал

Өмнөх аргачлалд багцыг бүрдүүлж байгаа санхүүгийн хэрэгслүүдийн $t+1$ үед гарах стандарт хазайлтыг тооцохдоо ажиглалтын утга тус бүрт харгалзах стандарт хазайлтыг тэнцүү жигнэсэн. Өөрөөр хэлбэл ингэхдээ энгийн математик буюу арифметик дундаж ашигладаг ба хугацааны t үед $t+1$ үеийн эрсдлийг тооцоолж байгаа бол ингэснээрээ уг аргачлалд ашиглагдах хугацааны өнгөрсөн үеүүдийг буюу ажиглалтын түүврийн тоо m-ийг их хэмжээтэйгээр авах үед хугацааны $t+1-m$ болон $t-1$ үеүүдийн мэдээллийг ирээдүйн эрсдэл тооцоолоход ижил ач холбогдол өгч байдаг. Энэ нь эрсдлийн үнэлгээ буюу тооцоолол бодит байдлаас өндөр алдаатай гаргах гол шалтгаан болдог.

Энэ байдлаас зайлсхийх үүднээс жигнэсэн дундаж арга буюу хугацааны өнгөрсөн үеийн ажиглалтуудын хазайлтыг тэнцүү биш байдлаар өөрөөр хэлбэл хугацааны сүүлчийн үед харгалзах хазайлтуудад өндөр, хугацааны өмнөх үед харгалзах хазайлтуудад бага жин оноодог. Энэ төрлийн аргачлалын нэг нь Exponancial Weighted Moving average[4] бөгөөд хугацааны $t+1$ үеийн стандарт хазайлтыг дараахь хэлбэртэйгээр авч үздэг.

$\sigma^2_{i,t+1} = \lambda X^2_{i,t} + (1-\lambda)\sigma^2_{i,t}$ Энд λ -нэгээс бага эерэг тоо.

Энэ хэлбэр нь GARCH аргачлалын $\alpha + \beta = 1$ тохиолдол бөгөөд λ -ийн үнэлэлтийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлэн олно. Тухайлбал JPMorgan λ -г 0.94-өөр авдаг. Илэрхийллийн баруун талын хоёрдугаар нэмэгдэхүүнийг цааш нь дахин дээрх хэлбэрээр задалбал рекурент хэлбэр нь дараах хэлбэртэй байна.

$$h^2_{i,t+1} = (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T}\lambda^{t-1}X^2_{i,t}$$

Өөрөөр хэлбэл нэгээс бага үржүүлэгчтэй геометр прогрессоор үндсэн хувьсагчийн хазайлтуудыг жигнэсэн хэлбэртэй болно. Өмнөх аргачлалаас ялгарах гол онцлог нь $t+1$ үеийн хазайлтыг үндсэн хувьсагчийн хугацааны t үеийн хазайлт болон үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтөөр тодорхойлсонд оршино.

Аргачлалд багцын хувьд холбогдох санхүүгийн хэрэгслүүдийн үндсэн хувьсагчдын ковариацын матрицыг оролцуулснаар дараахь хэлбэртэй болно.

$\Sigma_{t+1} = \lambda(X_t X_t^T) + (1-\lambda)\Sigma_t$.

λ болон $1-\lambda$ үржүүлэгчийг скаляр матриц хэлбэрээр дээрх илэрхийлэлд бичиж болно. Эндээс багцын стандарт хазайлт болон багцын эрсдлийн хэмжээг p итгэх магадлалтайгаар дараахь байдлаар олно.

$\sigma^2_{p,t+1} = \omega_t^T\Sigma_t\omega_t$, $VaR_{p,t+1} = p \cdot \sigma_{p,t} \cdot Y_{p,t}$.

1.3.2. GARCH аргачлал

Багцын үндсэн хувьсагчдын харьцангуй өөрчлөлтийн шинж чанараас хамааруулан эрсдэл тооцоолох аргачлалаа сонгон авдаг болович GARCH аргачлалыг өргөнөөр хэрэглэдэг. Delta-Normal аргачлалд үндсэн хувьсагчдын харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлт нь өмнөх үетэйгээ буюу хугацааны хувьд хамааралгүй гэж үзсэн.

[4] Уг аргыг RiskMetrics-ийн Technical Document-аас авсан бөгөөд JPMorgan груп хэрэглэдэг.

Ийм төрлийн аргачлалуудыг homoscedastic гэж нэрлэдэг. Гэвч зарим тохиолдолд үндсэн хувьсагчдын харьцангуй өөрчлөлтийн хэлбэлзэл нь өмнөх үетэйгээ хамааралтай байдаг ба уг хамаарлын нөлөөллийг тусгасан аргачлал санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлт буюу хэлбэлзэлийн үнэлгээг илүү нарийвчилж өгдөг. Энэ төрлийн буюу цаг хугацааны хувьд хамааралтай аргачлалуудыг heteroscedastic гэнэ. GARCH (Generalized autoregressive conditionally heteroscedastic) аргачлал нь тухайн үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийн онцлог байдлыг илүү сайн илэрхийлдэгээрээ давуу талтай боловч дээр дурьдагдсан аргачлалуудтай харьцуулахад хүндрэлтэй тал нь олон тооны параметрийг үнэлэх шаардлага гардгаас их хэмжээний тооцооллын үйлдэл хийх хэрэгтэй болдог. Санхүүгийн нэг хэрэгслийн хувьд GARCH аргачлал дараах ерөнхий хэлбэртэй байна.

$$\sigma^2_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X^2_{t+1-i} + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma^2_{t+1-i}, \text{ ¿¿í ä } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i < 1 .$$

Энэ хэлбэрийг товчоор GARCH(p,q) гэж тэмдэглэдэг ба уг аргачлалын хамгийн хялбар тохиолдол буюу GARCH(1,1) нь $\sigma^2_{t+1} = \omega + \alpha X^2_t + \beta \sigma^2_t$ байна. (энд $\alpha + \beta < 1$) Жигнэгдсэн дундаж арга нь GARCH(1,1)-ийн тухайн буюу $\alpha = 1 - \lambda$; $\beta = \lambda$; $\omega = 0$ байх тохиолдол юм. Энд параметрүүдийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлнэ. Үндсэн хувьсагчийн тархалт нормаль тархалттай тул хамгийн их үнэний хувь бүхий функц нь энэхүү тархалтын функц байна. Ажиглалтын хугацааны t үеийн хувьд магадлал буюу хамгийн их үнэний хувь нь дараахь байдалтай байна.

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2_t}} \exp\left(- \frac{X^2_t}{2\sigma^2_t} \right)$$

Эндээс ажиглалтын нийт хугацаанд харгалзах хамгийн их үнэний хувь нь дээрх хугацааны үе тус бүрийн ажиглалтын магадлалуудын үржвэр байна.

$$L = \prod_{t=1}^{n} l_t = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2_t}} \exp\left(- \frac{X^2_t}{2\sigma^2_t} \right)$$ буюу натураль логарифм авбал

$$\ln L = \sum_{t=1}^{n} \ln l_t = \sum_{t=1}^{n} \left[- \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma^2_t - \frac{1}{2} \frac{X^2_t}{\sigma^2_t} \right]$$ болно. Энд σ_t хэмжигдэхүүн нь параметрээр илэрхийлэгдсэн байгаа бөгөөд дээрх ажиглалтын n ширхэг хугацаанд харгалзах магадлалуудын нийлбэрчилсэн ω, α, β параметрүүдийг агуулсан (дээрх нийлбэрт зөвхөн эдгээр параметрүүд хувьсагч байдлаар оролцоно) lnL функцийг хамгийн их байлгах ω, α, β параметрүүдийн утгыг олно. Параметрүүдийг үнэлсэн тохиолдолд $t+1$ үеийн тухайн санхүүгийн хэрэгслийн эрсдлийн хэмжээг p итгэх магадлалтайгаар дараахь байдлаар тооцоолно.

$$VaR_{i,t+1} = p' \cdot \sigma_{p,t+1} \cdot Y_{p,t}$$

GARCH аргачлалын хувьд багцын үндсэн хувьсагчдын хамаарлын нөлөөллийг хялбарчлах үүднээс олон янзаар тооцоолол хийж болдог. Энд багцын эрсдэл тооцоолоход хэрэглэгддэг GARCH аргачлалын үндсэн гурван өргөтгөсөн хувилбарыг авч үзлээ.

1.3.2.1. VECH аргачлал

Багцын хувьд үндсэн хувьсагчдын вариацаас гадна тэдгээрийн хоорондын ковариацыг тооцоолох шаардлагатай байдаг. Тухайн вариац болон ковариац тус бүрийн тооцоололд бусад бүх вариац болон ковариацын нөлөөллийг оруулах шаардлагын үүднээс өргөтгөсөн GARCH аргачлалд үндсэн хувьсагчдын вариацууд, тэдгээрийн хоорондын ковариацуудаас бүрдсэн вектор буюу баганан матрицан бичиглэлийг ашигладаг. Ийм хэлбэрээр бичсэн аргачлалыг VECH (vecнь вектор гэсэн үгнээс гаралтай, H нь ковариацын матрицаас үүдэлтэй тэмдэглэгээ) гэж нэрлэдэг.

$VECH(\Sigma_{t+1}) = VECH(\Omega) + A \cdot VECH(X_t X_t^T) + B \cdot VECH(\Sigma_t)$

Үүнд Ω, A ба B-нь $n(n+1)/2$ хэмжээст тэгш хэмтэй матриц, $VECH$-диогналь матрицын баруун дээд талын гишүүдийг авч баганан матриц болгох буюу вектор авах үйлдэл. (Зарим тохиолдолд Ω матрицын оронд дээд болон доод гурвалжин матриц тэдгээрийн хөрвүүлсэн матрицуудын хоорондын үржвэр нь тэгш хэмтэй матриц гардагыг ашиглан WW' хэлбэртэйгээр W гэсэн дээд эсвэл доод гурвалжин матриц авсан байдаг.) Эндээс багцын нийт стандарт хазайлт дараахь байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$\sigma_{p,t+1}^2 = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t$

1.3.2.2. Диогналь VECH аргачлал

Багц хоёр ширхэг санхүүгийн хэрэгслээс бүрдэж байх үед VECH аргачлалд параметрэн матрицын гишүүдийг буюу нийт 21 ширхэг параметрийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлэхэд чиглэгддэг. Бодит байдалд багц нь олон тооны санхүүгийн хэрэгслээс бүрдэх ба параметрийн тоо маш олон болж, тэдгээрийг үнэлэхэд их хэмжээний үйлдэл, тооцоолол хийх шаардлагатай болдог. Олон төрлийн санхүүгийн хэрэгсэлд хөрөнгөө байршуулсан банкны хувьд параметр үнэлэх асуудал нь маш хүндрэлтэй болох бөгөөд өндөр хүчин чадалтай тооцоолох төхөөрөмж (компьютер) ашиглах шаардага гарах буюу өндөр зардалтай болдог. Иймд VECH аргачлалыг зарим тохиолдолд хялбарчлан хэрэглэдэг бөгөөд үүний нэг хэлбэр нь диогналь VECH аргачлал юм. Уг аргачлалд параметрийн A болон B матрицуудыг диогналь хэлбэртэйгээр авч үздэг ба бичиглэлийн хэлбэр нь VECH аргачлалтай ижил байна.

$VECH(\Sigma_{t+1}) = VECH(\Omega) + A \cdot VECH(X_t X_t^T) + B \cdot VECH(\Sigma_t)$

A, B матриц нь диогналь тул ковариацын $t+1$ хугацаан дахь матрицын гишүүд дараахь хэлбэртэй байна.

$\sigma_{ij,t+1}^2 = \omega_{ij} + \alpha_{ij} X_{i,t} X_{j,t} + \beta_{ij} \sigma_{ij,t}^2$. Энд $i, j = 1, \ldots, n$.

Эндээс багцын стандарт хазайлтыг дараахь байдлаар тооцоолно.

$\sigma_{p,t+1}^2 = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t$

1.3.2.3. BEKK аргачлал

VECH аргачлалд вектор хэлбэрээр ковариац болон үндсэн хувьсагчдын квадратуудыг бичдэг бол энэ аргачлалд ковариац болон үндсэн хувьсагчдын квадратуудыг матрицан хэлбэрээр илэрхийлсэн байдаг. Аргачлалын хэлбэр нь дараахь байдалтай байна.

$\Sigma_{t+1} = \Omega + A(X_t X_i^T)A^T + B \Sigma_t B^T$. Энд Ω, A ба B-нь $n(n+1)/2$ хэмжээст матриц.

Энд зарим тохиолдолд Ω матрицын оронд WW' хэлбэртэй байхаар W гэсэн дээд эсвэл доод гурвалжин матрицыг авсан байдаг. Эндээс багцын нийт $t+1$ хугацаан дахь стандарт хазайлт нь дараахь байдалтай байна.

$\sigma_{p,t+1}^2 = \omega_t^T \Sigma_t \omega_t$

1.3.3. ARCH

Зах зээлийн эрсдлийг үндсэн хувьсагчдын шинж чанарыг буюу түүний вариац болон ковариацууд цаг хугацааны хувьд хамааралгүй гэж үзэж эхний үед Historical Simulation, Delta-Normal аргачлалуудыг хэрэглэж байсан. Үүний дараагаар үндсэн хувьсагчдын вариац, ковариацын цаг хугацааны хамаарлын нөлөөллийг тусгасан динамик аргачлал ашиглах шаардлагатай болсон бөгөөд үүний хамгийн эхний (зах зээлийн эрсдлийн хувьд) аргачлал нь ARCH (autoregressive conditionally heteroscedastic) аргачлал юм. Уг аргачлалын ерөнхий хэлбэр нь дараахь байдалтай байна.

$$\sigma^2_{i,t+1} = \omega + \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \sigma^2_{i,t-j+1}$$

Дээрх хэлбэрийг ARCH(p) гэж тэмдэглэвэл тухайн тохиолдол буюу $n = 1$ ARCH(1) нь дараахь хэлбэртэй байна.

$$\sigma^2_{i,t+1} = \omega + \alpha \sigma^2_{i,t}$$

Уг аргачлалд үндэслэн GARCH аргачлалыг гаргаж авсан бөгөөд дээрх илэрхийллээс үзэхэд үндсэн хувьсагчийн нөлөөлөл буюу leverage effect-ийг оруулаагүйгээрээ ялгаатай. Гэхдээ параметрийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлэх шаардлагатай.

Багцын стандарт хазайлтыг ерөнхийдөө GARCH аргачлалтай ижил байдлаар аргачилж болох бөгөөд энэ тохиолдолд үндсэн хувьсагчийг агуулсан нэмэгдэхүүн байхгүй байна. Гэвч практикт ARCH аргачлалын өргөтгөсөн хэлбэрийг өргөн ашигладаггүй.

1.4. Шугаман бус хамааралтай санхүүгийн хэрэгслийн эрсдлийг тооцоолох (option)

Санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгсэл тухайлбал option-ы үнэлгээний функцаас үндсэн хувьсагчаар авсан хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал нь тэгээс эрс ялгаатай байдаг. Энд санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгслийн эрсдлийг тооцох зорилгоор үнэт цаасны энгийн option-ы үнэлгээний функцийг жишээ болгон авч үзье. Үнэт цаасны энгийн option-ы үнэлгээний функц Black-Scholes-ийн томьёогоор $y = f(x_t, K, t, \rho, \sigma)$ хэлбэртэй байг. Үүнд x_t нь хугацааны t үе дэх үндсэн хувьсагч буюу энэ тохиолдолд үнэт цаасны спот үнэ, K нь option хэрэгжүүлэх үнэ, t нь option-ийг хэрэгжүүлэхээр тохиролцсон (эцсийн) хугацаа (энэ нь ихэвчлэн жилээр илэрхийлэгдсэн байдаг), ρ нь option-ийг хэрэгжүүлэх хугацаанд хамаарах эрсдэлгүй өгөөжийн хувь, σ нь option-ий хугацаа (хэрэгжүүлэх буюу хэрэгжүүлэх эцсийн хугацаа)-н дахь үнэт цаас буюу үндсэн хувьсагчийн логарифмчлагдсан үнийн стандарт хазайлт. Тейлорын цуваагаар энэ төрлийн буюу олон хувьсагчийн фунцийг үндсэн хувьсагчийн хоёроос дээд эрэмбийн уламжлал тэгтэй тэнцүү бол дараахь хэлбэрт шилжүүлж болохыг өмнө харуулсан.

$$r'_{i,t} = \tilde{\delta} r_{i,t} + 0.5 \cdot \tilde{\Gamma} r^2_{i,t} + \tilde{\theta} n$$

1.4.1. Delta-Gamma аргачлал

Эрсдэл тооцох энгийн аргачлал хэсэгт санхүүгийн хэрэгслийн үнийн харьцангуй өөрчлөлт болон үндсэн хувьсагч буюу санхүүгийн суурь хэрэгслийн үнийн харьцангуй өөрчлөлт хоёрын хооронд шугаман хамааралтай үед Delta-Gamma аргачлалыг хэрхэн ашиглахыг харуулсан. Дээрх илэрхийллээс үзэхэд option-ы эрсдлийг тооцоолохын тулд delta, gamma болон theta нөлөөллийг тодорхойлох шаардлагатай. Үнэлгээний функц мэдэгдэж байгаа гэж үзвэл эдгээр уламжлалуудын нөлөөлөл буюу хэмжээг үндсэн хувьсагчдын хугацааны t үе дэх утгуудыг ашиглан тооцоолно.

Option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн тархалт дахь gamma болон theta нөлөөллийг option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт болон үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийн моментуудыг харьцуулах замаар дараахь байдлаар үзүүлж болно. Үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлт болох $r_{i,t}$ нь 0

дундажтай, $h^2_{i,t}$ стандарт хазайлт бүхий нормал тархалттай гэж үздэг. Хүснэгтэд $r_{i,t}$, $r'_{i,t}$ болон багцын үнэлгээний эхний 4 момент буюу дундаж, хазайлт, налалт, kurtosis-ийг харуулав.

Статистик параметр	Үндсэн хувьсагч	Option-ийн үнэлгээ	Багцын үнэлгээ[5]
Харьцангуй өөрчлөлт	$r_{i,t}$	$r'_{i,t}$	$r'_{1,t}\omega_{1,t} + r'_{2,t}\omega_{2,t} + \ldots + r'_{n,t}\omega_{n,t}$
Дундаж	0	$0.5 \cdot \Gamma\sigma^2_{i,t} + \tilde{\theta} n$	$0.5tr(\Gamma\Sigma)$
Хазайлт	$\sigma^2_{i,t}$	$\tilde{\delta}^2\sigma^2_{i,t} + 0.5\Gamma^2\sigma^4_{i,t}$	$\tilde{\delta}^T\Sigma\tilde{\delta} + 0.5tr(\Gamma\Sigma)^2$
Налуу	0	$3\tilde{\delta}^2\Gamma\sigma^8_{i,t} + \Gamma^3\sigma^6_{i,t}$	$3\tilde{\delta}^T\Sigma\Gamma\Sigma\tilde{\delta} + tr(\Gamma\Sigma)^3$
Kurtosis	$3\sigma^2_{i,t}$	$12\tilde{\delta}^2\Gamma^2\sigma^{12}_{i,t} + 3\Gamma^4\sigma^6_{i,t} + 3\sigma^4_{i,t}$	$12\tilde{\delta}^T\Sigma(\Gamma\Sigma)^2\tilde{\delta} + 3tr(\Gamma\Sigma)^4 + 3\mu_2^2$

Дээрх хүснэгтээс үзэхэд дараахь 3-н дүгнэлт гарч байна. Үүнд:

1. Үндсэн хувьсагчийн дундаж нь тэг байгаа боловч gamma болон theta тэгээс ялгаатай үед option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн дундаж нь тэгээс ялгаатай байна. Мөн option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн дундажийн тэмдэг нь option урт болон богино байгаагаас үл хамааран gamma, theta хэмжигдэхүүнүүдийн тэмдгээс хамаарч байна.

2. Option-ийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн хазайлт нь үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийн хазайлтаас $\tilde{\delta}^2_t + 0.5\Gamma^2_t\sigma^2_{i,t}$ үржигдэхүүнээр ялгаатай байна. Тухайн option нь урт эсвэл богино байх нь option-ны тархалт сөрөг эсвэл эерэг налалттай байхыг тодорхойлно. Хэрэв option богино бол Γ сөрөг байх тул налалтын утгыг илэрхийлж байгаа Γ^3_t нь мөн сөрөг тэмдэгтэй байна.

3. Хазайлт болон kurtosis-ийн хувьд Γ_t нь тэгш зэрэгтэйгээр илэрхийлэлд оролцож байгаа тул option-ны хазайлт болон kurtosis-ийн тэмдэг үндсэн хувьсагчийнхаас эсрэг байхгүй.

1.4.1.1. Johnson-ийн хувиргалт

Option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн эхний 4 моментийг үндэслэн эдгээр 4 моменттой ижил момент бүхий хэлбэр нь тодорхой тархалтыг олно. Өөрөөр хэлбэл үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн моментуудад Johnson-ны гэж нэрлэгдэх тодорхой боломжит тархалтыг моментууд нь option-ыхтай ижил байхаар тохируулан олно. Момент тохируулах гэдэг нь хэлбэр нь мэдэгдэж байгаа тухайн тархалтын параметрүүдийг уг тархалтын дундаж, хазайлт, налалт, kurtosis-ыг үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийнхтэй ижил байхаар олохыг хэлнэ. Энэ нь стандарт нормаль тархалттай үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтөөс option-ы үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийг илэрхийлэх шилжүүлэгчийг тодорхойлох асуудалд хүргэдэг. Үүнд Johnson шилжүүлэгчийн ерөнхий хэлбэрийг дараахь байдлаар гаргасан.

$Y_{i,t} = a + b \cdot g^{-1}\left(\frac{X_{i,t} - c}{d}\right)$. Энд g нь монотон функ, a, b, c, d нь option-ий үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн эхний 4 моментоор тодорхойлогдох параметрүүд. Энэхүү шилжүүлэгч үндсэндээ дараахь үндсэн 3 хэлбэртэй байдаг.

[5] Үүнд tr нь матрицын диогналийн элементүүдийн нийлбэрийг авах оператор

$g^{-1}(x) = \exp[x]$ - нэг талаасаа хязгаарлагдсан ($Y_{i,t} \geq a$)

$g^{-1}(x) = \frac{1}{1+e^x}$ -хоёр талаасаа хязгаарлагдсан ($a \leq Y_{i,t} \leq a+b$)

$g^{-1}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ -хязгаарлагдаагүй (уг функцийг товчоор $\sinh(x)$гэж тэмдэглэдэг.)

Үүнд $r_{i,t}$ нь стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүн бөгөөд дээрх 3 илэрхийлллээс уг стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнийг олон стандарт нормаль тархалтын нягтын функцэд орлуулан тавибал $r_{i,t}^{'}$-ийн нягтын функц гарах бөгөөд энэ нь дараахь хэлбэртэй байна.

$$N_{r_{i,t}^{'}}(X_{i,t}) = \frac{d}{c\cdot\sqrt{2\pi}} g^{'}\left(\frac{X_{i,t}-a}{b}\right)\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(c+d\cdot g\left(\frac{X_{i,t}-a}{b}\right)\right)\right)$$

Үүнд g функцийн уламжлал нь дараахь байдлаар олдоно.

$g^{'}(x) = \frac{1}{x}$ - нэг талаасаа хязгаарлагдсан үед

$g^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ -хоёр талаасаа хязгаарлагдсан үед

$g^{'}(x) = \frac{1-x}{x}$ --хязгаарлагдаагүй үед

Эндээс $N_{r_{i,t}^{'}}(X_{i,t})$-ийн эхний 4 момент нь дээрх хүснэгтэд тооцоолсон $Y_{i,t}$-ийн эхний 4 моментийн утгатай тэнцүү байх ёстой. Иймд a, b, c, d-гэсэн параметрүүд хувьсагч нь болох дөрвөн хувьсагчтай систем тэгшитгэл гарах бөгөөд үүнээс онолын хувьд хувьсагчдыг нэгэн утгатай олох боломжтой. (Гэвч моментууд нь нягтын фунцийн интеграл хэлбэртэй байхаас гадна Гаусын функцийн интеграл нь элементар функцээр илэрхийлэгдэхгүй тул a, b, c, d параметрүүдийг үнэлэх тусгай аргуудыг боловсруулсан байдаг. Үнэлгээний аргуудаас хамгийн өргөн хэрэглэгддэг арга буюу алгоритмд Hill, Hill болон Holder's-ийн алгоритм[6] ордог.) Параметрүүдийн утгыг олсон тохиолдолд p итгэх магадлалд хамаарах $X_{i,t}$-ийн утгыг Johnson-хувиргалт буюу дээрх илэрхийлэлд орлуулан тавихад $Y_{i,t}$-ийн p итгэх магадлалд хамаарах утга $p^{'}$ гарна. Эндээс санхүүгийн шугаман бус хамааралтай i хэрэгслийн хугацааны $t+1$ үеийн эрсдлийн хэмжээг дараахь байдлаар тооцоолно.

$$VaR_{i,t+1} = p^{'}_{r_{i,t}} \cdot R_{i,t}$$

Багцын хувьд Johnson-ийн хувиргалт нь санхүүгийн нэг хэрэгслийн хувьд ашигласан хувилбартай ижил хэлбэртэй байх бөгөөд багцын үнэлгээний эхний 4 моментийг олоход матрицан бичиглэл ашигладгаараа ялгаатай буюу илүү их тооцоолол хийх шаардлага гардаг. Өөрөөр хэлбэл $Y_{p,t}$-ийн тархалтын моментуудыг тооцоолохын тулд үндсэн хувьсагчид буюу $\{X_{i,t}\}_{i=1}^{n}$-ийн ковариацын матриц, delta, gamma, theta шаардлагатай болно. Эдгээрийг ашиглан өмнөх хүснэгт[7] дэх илэрхийллийн дагуу багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн эхний 4 моментийг олсноор Johnson-ий хувиргалтын параметрүүдийг санхүүгийн

[6] Уг алгоритмыг fortran хэл дээрх кодыг http://lib.stat.cmu.edu/griffiths-hill/ хаягаас харж болно.

[7] Багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн төвийн моментуудыг олох талаар дэлгэрэнгүй хавсралтаар үзүүлэв.

нэг хэрэгслийн хувьд үнэлсэнтэй ижил байдлаар үнэлсэнээр багцын эрсдлийг тооцоолох боломж бүрдэнэ.

Johnson-ий хувиргалтын арга нь санхүүгийн шугаман бус хэрэгсэлтэй багцын эрсдлийг тооцоолох аргуудаас хамгийн бага тооцоолол шаардагдах буюу энгийн аргад хамаардаг.

1.4.1.2. Фурьегийн аргачлал

Уг аргачлал нь тухайн функцийг Фурьегийн цуваагаар (функцийг Тейлорын цуваагаар задлах буюу функцэд олон гишүүнт хэлбэртэйгээр дөхөхтэй ижлээр) задлах буюу функцэд Фурьегийн интегралаар дөхөх аргад үндэслэгдсэн. Фурьегийн цуваа нь ерөнхий байдлаараа тригонометр хэлбэртэй байдаг боловч эрсдлийн тооцоололд комплекс хэлбэрийг хэрэглэдэг. Хэрэв $N(Y_{i,t})$ нь $Y_{i,t}$-ийн нягтын функц байвал уг функцийн Фурьегийн хувиргалт нь дараахь хэлбэртэй байна.

$M(iu) = E(e^{iuY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuY} N(Y)dY$, $N(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuY} M(iu)du$ (Энд $Y_{i,t}$-ийг товчоор Y гэж тэмдэглэв.) Өөрөөр хэлбэл тухайн функцийн Фурьегийн хувиргалтаар гарах функц болон тухайн функцуудийг харгалзан тухайн функц болон Фурьегийн хувиргалтаар гарсан функцуудаар харилцан нэг утгатай олж болдог. Иймд Y -ийн нягтын функцийг олохын тулд түүний Фурьегийн хувиргалтыг олох асуудалд хүрнэ.

Фурьегийн хувиргалт нь момент үүсгэгч функцийн комплекс хэлбэр тул момент үүсгэгч функцийг (эсвэл характеристик функц) олсноор Фурьегийн хувиргалын функцийг олж болно. Өөрөөр хэлбэл Фурьегийн хувиргалт дахь iu комплекс хувьсагчийн оронд u бодит хувьсагчийг олоход моменд үүсгэгч функц гарч ирнэ.

Санхүүгийн шугаман бус хамааралтай нэг хэрэгслийн хувьд хэрэв үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нь үндсэн хувьсагчийн өөрчлөлтөөс $Y_{i,t} = \delta' r_{i,t} + 0.5\Gamma' X_{i,t}^2$ (цаашид бичлэгийг хялбарчлах үүднээс δ'-ийг δ -аар, $0.5\Gamma'$-ийг Γ -аар тус тус орлуулан бичив) хамааралтай бол Фурьегийн хувиргалт дараахь хэлбэртэй байна.

$$E(e^{iuY}) = E(e^{iu(\delta' X + \Gamma' X^2)}) = \frac{1}{\sqrt{1-2i\Gamma u}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta'^2 u^2}{1-2i\Gamma u}\right)$$

Эндээс r' хэмжигдэхүүний нягтын функц нь Фурьегийн урвуу хувиргалт буюу дараахь байдлаар олдоно.

$$N(r') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iur'} M(iu)du$$

Багц санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгслүүдээс бүрдэж байгаа тохиолдолд багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт $Y_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} \delta'_i X_i + 0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma'_{i,j} X_i X_j$ буюу үүнийг матрицан хэлбэрээр бичвэл $Y_{p,t} = \delta^T X + X^T \Gamma X$ байна. Иймд $Y_{p,t}$-ийн характеристик функц нь дараахь байдлаар тодорхойлогдоно.

$M(iu) = E(e^{iuY_p}) = E(e^{iu(\delta^T X + X^T \Gamma X)}) = \left|I - 2u\Gamma\Sigma\right|^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{2}(u\Sigma\delta)(I - 2u\Sigma)^{-1}\Sigma^{-1}(u\Sigma\delta)\right]$ (Үүнд I - нэгж матриц Σ нь ковариацын матриц). Эндээс багцын нягтын функц дараахь байдлаар тодорхойлогдоно.

$$N(Y_p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuY_p} M(iu)du$$

1.4.2. Monte Carlo аргачлал

Санхүүгийн шугаман бус хамааралтай хэрэгслийн зах зээлийн эрсдлийг тооцоолоход дээрх болон бусад аналитик аргыг хэрэглэхээс гадна Monte Carlo аргачлалаар түүвэр зохиож багцын эрсдэл тооцоолж буй хугацааны үеийн тархалтыг олох замаар эрсдлийг тооцоолдог. Уг аргачлалыг багц санхүүгийн шугаман болон шугаман бус хамааралтай хэрэгслүүдээс бүрдсэн үед хэрэглэхэд илүү тохиромжтой байдаг. Энэ арга нь тухайн нэг санхүүгийн хэрэгслээс гадна багцын үнэлгээний тархалтыг бүхэлд нь гаргаж үнэлгээ хийх боломжтой байдгаараа давуу талтай. Багцын эрсдлийг Монте Карло аргаар тооцоолох ерөнхий аргачлал дараахь гурван үе шатаас бүрдэнэ:

1. Түүвэр зохиох (бүрдүүлэх)-Багцын санхүүгийн үндсэн хэрэгслүүдийн хувьд тооцоолсон вариац болон ковариацуудыг ашиглах замаар үнэлгээний ln тасралтгүй хуримтлуулах аргын дагуу санхүүгийн хэрэгслүүдийн үнэлгээний олон хэмжээст түүврийг гаргаж авна.

2. Багцын үнэлгээ-Түүврийн гишүүн тус бүрийн хувьд багцыг үнэлнэ.

3. Хураангуйлах-Түүврийн дагуу хийгдсэн үнэлгээний үр дүн буюу багцын тархалт болон тодорхой нэг санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн эрсдлийн хэмжээг гаргана.

Түүвэр зохиох

Багц санхүүгийн шугаман бус хэрэгсэл буюу тухайлбал option-оос бүрдэж байвал үндсэн хувьсагч нь ерөнхийдөө санхүүгийн өөр нэг хэрэгсэл байдаг. Үнэт цаасны option-ний хувьд үнэт цаасны үнэлгээ, өрийн бичгийн option-ий хувьд өрийн бичгийн үнэлгээ зэрэг нь үндсэн хувьсагч болно. Иймд уг аргачлалыг тодорхой болгох үүднээс үнэт цаасанд хийсэн option-ий эрсдлийг тооцоольё.

Санхүүгийн шугаман бус хэрэгсэл (option)-ийн үндсэн хувьсагч нь үнэт цаасны үнэлгээ байвал хугацааны t үеийн (эрсдэл тооцоолж байгаа хугацааг 0 гэвэл) эрсдлийг тооцоолохын тулд үнэт цаасны үнэлгээний функцийг ашиглан хугацааны t үеийн үнэлгээг тооцоолно. Үнэт цаасны үнэ P_o байгаа гэвэл хугацааны t үеийн үнэлгээ нь $P_t = P_0 e^{\sigma\sqrt{t}Y}$ болно. Үүнд σ нь санхүүгийн үндсэн хэрэгсэл (үнэт цаас)-ийн нэгж хугацааны стандарт хазайлт, x нь стандарт нормаль тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн. Эндээс түүвэр зохиохын тулд дээрх стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнийг олж, санхүүгийн үндсэн хэрэгслийн үнэлгээг тооцоолно. Багцын хувьд стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнийг үнэлэх үйлдэл нь ерөнхийдөө адил боловч санамсаргүйгээр үүсгэсэн стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнүүдийн корреляцийн матриц нь үндсэн хувьсагчдын корреляцийн матриц $H_t^{'}$-тай ижил байх нөхцөл тавигддаг.

Хоорондоо хамааралгүй стандарт нормаль тархалттай хувьсагчдыг санамсаргүйгээр шууд зохиох боловч хамааралтай хэмжигдэхүүнийг санамсаргүй байдлаар зохиохын тулд матрицад зарим хувиргалт хийх хэрэгтэй болдог. Өөрөөр хэлбэл нэгж стандарт хазайлттай, $n \times n$ хэмжээст корреляцийн матриц нь өгөгдсөн, n (n-багцын санхүүгийн хэрэгсэлүүдийн тоо) ширхэг стандарт нормаль тархалттай хувьсагчдыг байгуулахын тулд эхлээд корреляцийн матрицад хувиргалт хийнэ. Үүний тулд n ширхэг хамааралгүй хэмжигдэхүүнүүдийг санамсаргүйгээр зохиож, эдгээр нь холбогдох $n \times n$ хэмжээст корреляцийн матрицын шаардлагыг хангахаар дараах байдлаар хувиргалт хийнэ. Үүнд:

- Cholesky-ийн хувиргалтыг ашиглах замаар $H_t^{'} = AA^T$ нөхцлийг хангах доод гурвалжин A матрицад задална.
  Тухайлбал дээрх үйлдлийг хоёр санамсаргүй хэмжигдэхүүний хувьд дараахь байдлаар хийнэ.
  Σ -д хийсэн Cholesky-ийн хувиргалтын дагуу A матриц $\Sigma = AA^T$ нөхцлийг хангахаар дараахь хэлбэртэй байна.
  $$A_{n\times n} \quad a_{ii} = \left(\rho_{ii,t} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{1/2}, \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\rho_{ij,t} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk} \right)^{1/2}$$
  Үүнд дээрх Cholesky-ийн хувиргалт хийхэд корреляцийн матриц эерэг тодорхойлогчтой байх шаардлагатай. Гэвч үндсэн хувьсагчдын корреляцийн матриц заавал эерэг тодорхойлогчтой байх шаардлагагүй бөгөөд энэ тохиолдолд хувиргалтын бусад аргуудыг хэрэглэх хэрэгтэй.
- $n \times 1$ хэмжээст, санамсаргүйгээр олсон хамааралгүй стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнээс бүрдэх L матрицыг санамсаргүйгээр зохионо.
- X матрицыг $X = AY$ байдлаар үүсгэнэ. Ингэснээр X -ийн элемент бүр нэгж стандарт хазайлттай байх бөгөөд корреляцийн матриц нь $H_t^{'}$ байна.

Дээрх байдлаар $H_t^{'}$ ковариацын матрицтай санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийг үүсгэснээр санхүүгийн үндсэн хэрэгслийн ирээдүйн үнэлгээнээс бүрдэх түүврийг үүсгэж болно. Багцын санхүүгийн i хэрэгслийн үндсэн хувьсагчийн өнөөгийн үнэлгээ $P_{i,0}$, нэгж хугацаанд гарах стандарт хазайлт нь σ_i бол ирээдүйн үнэлгээ нь $P_{i,t} = P_{i,0}^{\sigma_i \sqrt{t} \cdot x}$ байх тул хугацааны t үе дэх түүвэр $\left\{ P_{i,t} \right\}_{i=1}^{n}$ байна. Өөрөөр хэлбэл түүврийг бүрдүүлэхийн тулд санамсаргүй байдлаар олсон стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүн x_i бүрийг ашиглан санхүүгийн i үндсэн хувьсагчийн ирээдүйн үнэлгээг тооцоолно.

Багцын үнэлгээ

Өмнөх хэсэгт заасан байдлаар түүвэр зохиосны дараа багцын үнэлгээг хийнэ. Багцын үнэлгээг багц хэр олон санхүүгийн хэрэгслээс бүрдэж байгаа, тооцоолол хийхэд ямар хугацаа шаардагдах зэргээс шалтгаалан үйлдлээ хялбаршуулах үүднээс 3 хувилбараар тооцоолж болно. Үүнд

- Бүтэн үнэлгээ
- Delta үнэлгээ
- Delta-Gamma үнэлгээ (Уг үнэлгээнд theta үнэлэлтийг мөн оролцуулж болно.)

• Багцын бүтэн үнэлгээ

Энэхүү үнэлэлт нь зарим талаараа хялбар боловч их хэмжээний тооцоолол хийх шаардлагатай болдог. Санхүүгийн i үндсэн хувьсагчийн ирээдүйн үнэлгээ бүрээс тогтох түүврийн гишүүн бүрийн хувьд үнэлэлтийн функцийг ашиглан (жишээ нь үнэт цаасны option хувьд Black-Scholes-ийн үнэлгээний функцийг ашиглаж болно) санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн үнэлгээг тооцоолно. Тухайлбал Monte Carlo аргачлалаар хугацааны t өдрийн дараахь байдлаар үндсэн хувьсагчийн үнэлгээ $k_{i,t}$ болсон бол санхүүгийн i хэрэгслийн хугацааны t үеийн үнэлгээ нь $y_{i,t} = f(x_{i,t})$ байна. Өөрөөр хэлбэл санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээ хугацааны t үед $\Delta y_i = f(x_{i,t}) - f(x_{i,0})$ болж өөрчлөгдөнө. Эндээс (1) илэрхийллийг ашиглан багцын өөрчлөлт буюу ΔF -г тооцоолно.

- *Багцын шугаман үнэлэлт (ойролцоолол)*

Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функц жишээлбэл Black-Scholes-ийн үнэлгээний функцийг бүтэн хэлбэрээр нь хэрэглэн санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн болон багцын үнэлгээг гаргахад түүврийг их хэмжээтэйгээр хийсэн тохиолдолд их хэмжээний тооцооллын үйлдэл хийх шаардлагатай болдог. Иймээс үнэлгээний функцийг ойролцоо хэлбэрт шилжүүлэн ашиглах нь тооцооллын талаасаа болон бусад зарим талаараа давуу талтай байдаг. Ойролцоо тооцооллын хамгийн энгийн арга нь delta арга бөгөөд үүнд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцийг ойролцоо шугаман хэлбэрээр орлуулж санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг гаргадаг. Энэ тохиолдолд санхүүгийн хэрэгслийн хугацааны тухайн үеийн үнэлгээ нь $y_{i,0}$, үндсэн хувьсагчийн утга нь $x_{i,0}$ байвал санхүүгийн хэрэгслийн хугацааны t үеийн үнэлгээ нь дараахь байдалтай байна.
$y_{i,t} = y_{i,0} + \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0})$. Үүнд $\delta_i = f_i^{'}(x_i)$ буюу санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцаас үндсэн хувьсагчаар авсан нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал.
Эндээс санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээ хугацааны t үе дэх өөрчлөлт $y_{i,t} - y_{i,0} = \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0})$ болно. Эндээс (1) илэрхийллийг ашиглан багцын өөрчлөлт буюу ΔF -г тооцоолно.

- *Багцын дээд эрэмбийн барагцаалал*

Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг ойролцоогоор тооцоолох дээрх арга нь үндсэн хувьсагч их хэмжээгээр өөрчлөгдсөн тохиолдолд үнэлэлтийг өндөр алдаатай гаргадаг. Өөрөөр хэлбэл уг арга нь үндсэн хувьсагч харьцангуй бага өөрчлөлттэй байх үед илүү тохиромжтой юм. Иймд үндсэн хувьсагчийн их өөрчлөлттэй үед санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээг бага алдаатай үнэлэх аргыг ашиглах шаардлага гардаг. Үүний тулд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцийг Тейлорын цуваагаар хоёрдугаар эрэмбийн уламжлал хүртэл нь задалсан хэлбэрийг авдаг. Уг барагцаалалд хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалын нөлөөлөл буюу gamma-г оролцуулахаас гадна санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээнд нөлөөлөх хугацааны өөрчлөлтийн нөлөөлөл буюу tetha (үнэлгээний функцаас хугацаагаар авсан нэгдүгээр эрэмбийн уламжлал)-г оруулан сайжруулж болно. Энэ тохиолдолд санхүүгийн хэрэгслийн хугацааны тухайн үеийн үнэлгээ нь $y_{i,0}$, үндсэн хувьсагчийн утга нь $x_{i,0}$ байвал санхүүгийн хэрэгслийн хугацааны t үеийн үнэлгээ нь эдгээр нөлөөллийг нэмсэн ойролцоо илэрхийлэл болж дараахь хэлбэрүүдтэй байна.
$y_{i,t} = y_{i,0} + \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0}) + \Gamma_i (x_{i,t} - x_{i,0})^2$, $y_{i,t} = y_{i,0} + \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0}) + \Gamma_i (x_{i,t} - x_{i,0})^2 + \theta t$. Үүнд t нь эрсдлийн үнэлгээ хийж байгаа хугацааны урт бөгөөд $\delta_i = f_i^{'}(x_i)$, $\Gamma_i = f_i^{''}(x_i)$ буюу нэг, хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалууд. Эндээс санхүүгийн i хэрэгслийн үнэлгээ хугацааны t үед өөрчлөлт $y_{i,t} - y_{i,0} = \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0}) + \Gamma_i (x_{i,t} - x_{i,0})^2$ $y_{i,t} - y_{i,0} = \delta_i (x_{i,t} - x_{i,0}) + \Gamma_i (x_{i,t} - x_{i,0})^2 + \theta t$ болно. Эндээс (1) илэрхийллийг ашиглан багцын өөрчлөлт буюу ΔF -г тооцоолно.

Эрсдэл үнэлэх

Бүрдүүлсэн түүврийн бүрэлдэхүүн тус бүрд багцын үнэлгээ хийсний эцэст гарсан үр дүнд үндэслэн багцын эрсдэл VaR-ийг тодорхой итгэх магадлалтайгаар олно. Үүний тулд гарсан үр дүнг эрэмблэн жагсааж, багцын харьцангуй өөрчлөлтийн түүврийг жагсаан сонгон авсан итгэх магадлалд харгалзах үзүүлэлтийг сонгон авах замаар гаргана.

Хоёр. Санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгал

Банк илүүдэл санхүүгийн хөрөнгөө зүй зохистой байршуулж ашигт ажиллагаагаа нэмэгдүүлэх болон зах зээлд тодорхой чиглэлээр болон ерөнхий байдлаар байр суурь эзлэх зорилгоор санхүүгийн зах зээлд идэвхитэй үйл ажиллагаа явуулах шаардлагатай болдог. Энэ тохиолдолд ямар төрлийн санхүүгийн хэрэгсэл буюу бүтээгдэхүүнийг ямар хэмжээ болон нөхцөлтэйгөөр эзэмшиж байгаагаас хамааран тэдгээрийн хүлээж болзошгүй эрсдлийн хэмжээ харилцан ялгаатай байна. Ийм нөхцөлд банкууд эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслийнхээ эрсдлийн түвшин ирээдүйд ямар хэмжээтэй байж болохыг үндэслэлтэйгээр бодитой тогтоон түүнийг зөв чиглэлд үндсэн зорилгоо хангахуйц байдлаар удирдах зайлшгүй шаардлага гарна. Өөрөөр хэлбэл банк ирээдүйд хүлээж болзошгүй эрсдэлээ хэмжих асуудал зүй ёсоор тавигдах бөгөөд банкууд зах зээлийн эрсдлээ хэмжихийн тулд мөнгөн урсгалаа хэрхэн урьдчилан тооцоолох үндсэн аргуудыг энэ хэсэгт үзүүллээ.

2.1. Санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалыг тогтоох

Банкны эзэмшиж байгаа олон төрлийн санхүүгийн хэрэгслүүдээс бүрдэх багцын хүлээж болзошгүй эрсдлийг тодорхойлох (хэмжих) хамгийн эхний алхам нь тэдгээр санхүүгийн хэрэгслүүдийн мөнгөн урсгалыг тодорхойлох явдал байдаг.

Аливаа мөнгөн урсгал нь зах зээлийн үнээр илэрхийлэгдэх ба санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалыг зах зээлийн үнээр илэрхийлнэ гэдэг нь зах зээлийн тухайн үеийн өгөгдсөн аливаа үнэ (ханш, хүүгийн түвшин)-ээр уг санхүүгийн бүтээгдэхүүний мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг тодорхойлоно гэсэн үг. Үүний тулд тухайн үеийн зах зээлийн үнэ, тухайлбал, банкнаас шинээр гаргасан аливаа үнэт цаас (өрийн бичиг гэх мэт)-ны зах зээлийн өгөөжүүд (yield curve), хямдруулалттай өрийн бичгийн хямдруулалтын үндсэн хүүгийн талаарх мэдээлэл шаардлагатай. (Хямдруулалтын үндсэн хүү гэдэг нь ирээдүйн тодорхой хугацаанд гарах хямдруулсан мөнгөн урсгалтай ерөнхийдөө шууд хамааралтай байдаг.) болно.

Ихэнх санхүүгийн хэрэгслийн шинж чанар нь хүүгээр тодорхойлогдох бөгөөд санхүүгийн хэрэгслийн хүү нь мөнгөн урсгалын хуваарилалтыг тодорхой хугацаанд ямар хэмжээтэйгээр гарахыг тодорхойлдог. Аливаа эрсдлийг хэмжихэд мөнгөн урсгалын адилтгалын аргыг өргөн ашигладаг.

2.1.1. Тогтмол орлоготой санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалыг тогтоох

2.1.1.1. Энгийн өрийн бичиг

Энгийн өрийн бичиг гэж үндсэн дүнгээс нь тогтмол хүү тооцогддог, хүүгийн төлбөр нь тодорхой хугацаанд тогтмол хийгдэж, хүүгийн сүүлчийн төлбөр нь үндсэн дүнгийн хамт төлөгддөг өрийн бичгийг хэлнэ. Уг өрийн бичгийн хүү нь тогтмол тул хүүгийн болон үндсэн төлбөрийн ирээдүйд гарах мөнгөн урсгал нь тухайн үед гарах мөнгөн урсгалаар шууд тодорхойлогдоно. Өөрөөр хэлбэл мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг хүүгийн болон үндсэн төлбөрийг тус тусад нь тухайн харгалзах хугацаа бүхий хямдруулсан өрийн бичиг байдлаар салган $P_{ӨБТ} = \frac{P \cdot f}{(1+r_{1-t,t})} + \frac{P \cdot f}{(1+r_{2-t,t})} + \ldots + \frac{P \cdot f}{(1+r_{n-t,t})} + \frac{P}{(1+r_{n-t,t})}$ хэлбэртэй бичиж болно. (Үүнд $r_{k-t,t}$-нь хугацааны t агшинд бодогдсон хүүгийн төлбөргүй өрийн бичгийн хүү, f -үндсэн дүнгээс нь бодогдох тогтмол хүү)

2.1.1.2. Хувьсах хүүтэй өрийн бичиг

Хувьсах хүүтэй өрийн бичиг гэж үндсэн дүнгээс хувьсах хүү тооцогдох, хүүгийн төлбөр тодорхой хугацаанд тогтмол, хүүгийн сүүлчийн төлбөр нь үндсэн дүнгийн хамт төлөгддөг санхүүгийн хэрэгсэлийг хэлнэ. Энэ төрлийн санхүүгийн хэрэгслийн хүү нь хувьсах шинжтэй хэдий ч ирээдүйн тодорхой давтамжтай хийгдэх тул хүүгийн төлбөрийн хэмжээг тодорхойлохдоо уг өмнөх хугацааны хүүг ашигладаг. Тухайлбал хэрэв хүүгийн төлбөр хагас жил тутам хийгдэх бол тухайн үеийн 6 сарын хугацаатай LIBOR хүү дараагийн 6 дахь сард хийгдэх хүүгийн хэмжээг тодорхойлоход ашиглагдаж болно.

Уг санхүүгийн хэрэгслийн хэлцэл хугацааны t үед хийгдээд, хүүгийн төлбөр нь тодорхой давтамжтайгаар (тухайлбал, хагас жил тутам, улирал тутам, жил тутам г.м.) төлөгддөг гэж үзвэл хүүгийн төлбөр хийгдэх эхний хугацааны мөнгөн урсгал нь тодорхой байх бөгөөд харин түүнээс хойш хийгдэх хүүгийн төлбөрийн мөнгөн урсгалын хэмжээг шууд тодорхойлох боломжгүй. (Сүүлчийн төлбөрийн мөнгөн урсгал тодорхойгүй хүүгийн түвшин мэдэгдсэн нөхцөлд тодорхой болно.) Энэ тохиолдолд хүүгийн i дүгээр төлбөрийн хэмжээг тодорхойлоход forward хүүг ашиглана. $f_{1,i-1}$ нь $i-1$ хугацааны forward хүүгийн хувь, P нь үндсэн дүн гэвэл i дүгээр хугацаанд гарах хүүгийн төлбөрийн мөнгөн урсгалын хэжмээ нь $P\cdot f_{1,i-1}$ болно. ($i-1$ хугацааны forward хүү нь $f_{1,t}=\frac{(1+r_{i-t})}{(1+r_{i-1-t})}-1$). Эдгээрээс хувьсах хүүтэй өрийн бичгийн ирээдүйд гарах мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг илэрхийлэн бичвэл $P_{ӨБХ}=\frac{P\cdot r_{1,0}}{(1+r_{1-t,t})}+\frac{P\cdot f_{1,1}}{(1+r_{2-t,t})}+\frac{P\cdot f_{1,2}}{(1+r_{3-t,t})}+\ldots+\frac{P\cdot f_{1,n-2}}{(1+r_{n-1-t,t})}+\frac{P}{(1+r_{n-t,t})}$ болно. Үүнд forward хүүг тодорхойлсон дээрх илэрхийллийг орлуулбал $P_{ӨБХ}=\frac{P\cdot r_{1,0}}{(1+r_{1-t,t})}$ болох бөгөөд энэ нь хувьсах хүүтэй өрийн бичгийн нийт мөнгөн урсгалын t хугацаа руу шилжүүлсэн дүн юм. (Үүнээс үзэхэд хэрэв хэлцэл t=0 үед хийгдсэн бол хувьсах хүүтэй өрийн бичгийн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнэ нь Р байна.)

2.1.1.3. Хүүгийн энгийн swap хэлцэл

Хүүгийн энгийн swap хэлцлийг санхүүгийн байгууллага нь хүүгийн тодорхойгүй байдлаас үүсэх хүүгийн төлбөрийн мөнгөн урсгалд гарч болох эрсдлээс хамгаалах зорилгоор ашигладаг. Уг хэлцэлд оролцсоноор санхүүгийн байгууллага тодорхой үндсэн дүнд хамаарах тогтмол хүүг хэлцэл хийсэн этгээдэд төлж (хэлцэл хийсэн этгээдээс авч), уг үндсэн дүнд хамаарах хувьсах хүүг тухайн хэлцэл хийсэн этгээд уг санхүүгийн байгууллагад төлөх (тухайн хэлцэл хийсэн этгээд уг санхүүгийн байгууллагаас авах) үйлдэл явагдана. Хүүгийн энгийн swap-ын мөнгөн урсгалыг тодорхойлохын тулд тухайлбал, санхүүгийн байгууллага хувьсах хүү төлж, тогтмол хүү авч байвал уг санхүүгийн байгууллагыг энгийн өрийн бичиг худалдан авч, хувьсах хүүтэй өрийн бичиг худалдсан байдлаар ойлгож болно. Иймээс цэвэр мөнгөн урсгалыг энгийн болон хувьсах хүүтэй өрийн бичгийн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийн илэрхийллийг ашиглан бичвэл $P_{ХЭS}=P_{ӨБТ}-P_{ӨБХ}$ хэлбэртэй болно. (Санхүүгийн байгууллага уг хэлцэлд дээрх байдлаар оролцсон тохиолдолд бодит байдалд тогтмол хүүг нэрлэсэн дүнгээр нь төлж, хувьсах хүүг мөн тухайн үеийн нэрлэсэн дүнгээр нь авдаг. Иймд уг хэлцлийн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг цэвэр хэлбэрээр биш $P_{ӨБТ}$ болон $-P_{ӨБХ}$ байдлаар шууд авч үзэж болно.)

2.1.1.4. Ирээдүйд хэрэгжиж эхлэх swap хэлцэл

Энэ санхүүгийн хэрэгсэл нь хүүгийн энгийн swap-тай ерөнхийдөө ижил боловч ялгаатай нь тодорхой хугацааны дараа хүүгийн төлбөр хийгдэж эхэлдэг. Ингэснээр энгийн swap-тай ижлээр мөнгөн урсгалыг тогтоох үед хувьсах хэсгийн мөнгөн урсгал нь бүгд тодорхойгүй болно. Санхүүгийн байгууллага нь хугацааны k-үеэс эхлэн хүүгийн төлбөр харилцан хийгдэж, ирээдүйд хэрэгжиж эхлэх swap хэлцэлд хугацааны t үед оролцсон гэж үзвэл тогтмол хэсгийн орох мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнэ $P_{ӨБТ^s} = \frac{P \cdot f}{(1+r_{k-t,t})} + \frac{P \cdot f}{(1+r_{k+1-t,t})} + \ldots + \frac{P \cdot f}{(1+r_{n-t,t})} + \frac{P}{(1+r_{n-t,t})}$ болно. Харин хувьсах хэсгийн мөнгөн урсгал нь $P_{ӨБХ^s} = \frac{P \cdot f_{1,k-1}}{(1+r_{k-t,t})} + \frac{P \cdot f_{1,k}}{(1+r_{k+1-t,t})} + \ldots + \frac{P \cdot f_{1,n-2}}{(1+r_{n-1-t,t})} + \frac{P}{(1+r_{n-t,t})}$ буюу $P_{ӨБХ^s} = \frac{P}{(1+r_{k-t,t})}$ байна.

2.1.1.5. Forward хүүгийн хэлцэл

Forward хүүгийн хэлцэл нь хүүгийн эрсдлээс хамгаалах санхүүгийн хэрэгсэл. Энэ нь ирээдүйн тодорхой хугацааны завсарт зээлэх (forward хүүгийн гэрээг худалдан авах) болон зээлдүүлэх (forward хүүгийн гэрээг худалдах) хүүд хамгаалалт хийдэг.

Уг хэлцэлд санхүүгийн байгууллага нь ирээдүйд тодорхой хугацаанаас эхлэх хугацааны тодорхой завсарт харилцан тохиролцсон санхүүгийн болон төлбөрийн хэрэгслийг эсвэл бүтээгдэхүүнийг мөн харилцан тохиролцсон хүүгээр зээлэх (зээлдүүлэх) үүрэг хүлээдэг. Үүнд P үндсэн дүнг ирээдүйн t хугацаанаас эхлэх n завсарт r хүүтэйгээр зээлэх (зээлдүүлэх)-ээр тохиролцсон гэж үзвэл санхүүгийн байгууллагын уг хэлцэлтэй холбоотой мөнгөн урсгалыг өнөөгийн байдлаар илэрхийлбэл P үндсэн дүнг хугацааны өнөөгийн үе (буюу 0 үе)-д $t+n$ хугацаатайгаар, $(1+r_t)\cdot(1+r)$ хүүтэйгээр зээлж аваад (зээлдүүлээд), t хугацаатайгаар $(1+r_t)$ хүүтэйгээр зээлэх (зээлж авах) үйл ажиллагаатай ижил шинжтэй байна.

2.1.1.6. Хүүгийн future хэлцэл

Хүүгийн future хэлцлийн мөнгөн урсгалыг forward хүүгийн хэлцлийн мөнгөн урсгалтай ижил байдлаар тодорхойлно. Ялгаатай тал нь уг хэлцэл нь хийгдэхдээ ихэнх тохиолдолд хямдруулсан байдлаар хийгддэг.

2.1.2. Гадаад валютын арилжаа

Санхүүгийн хэрэгслүүд нь тайлан мэдээнд тусгагдахдаа суурь буюу тухайн орны валютаар (тухайлбал АНУ-ын санхүүгийн байгууллагууд тайлангаа ам. доллараар илэрхийлэн тайлагнадаг бол манай орны санхүүгийн байгууллагууд төгрөгөөр илэрхийлэн тайлагнана) илэрхийлэгддэг. Санхүүгийн байгууллагын хувьд эрсдэл нь зөвхөн тухайн орны валютаар илэрхийлэгдсэн санхүүгийн хэрэгсэлээр хязгаарлагдахгүй. Санхүүгийн 2 байгууллагын хувьд аль аль нь А орны Засгийн газрын өрийн бичгийг худалдан авсан гэж үзвэл А байгууллагад зөвхөн хүүгийн эрсдэл гарч болзошгүй байдаг бол В байгууллагад хүүгийн эрсдлээс гадна валютын ханшийн эрсдэл гарч болзошгүй болно. Иймээс гадаад валютын ханшийн эрсдлийг хэмжихэд зайлшгүй шаардлагатай чухал зүйл бол гадаад валютад суурилсан санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалыг тодорхойлох явдал байдаг.

2.1.2.1. Spot позици

Гадаад валютын спот позицийн мөнгөн урсгалыг тодорхойлохдоо мөнгөн урсгалыг тодорхойлох үеийн гадаад валютаар илэрхийлэгдсэн дүнгээр тухайн үеийн спот ханшийг ашиглан шууд тодорхойлно. Тухайлбал авлага нь орох мөнгөн урсгал, өглөг нь гарах мөнгөн урсгал байна.

2.1.2.2. Гадаад валютын forward арилжааны хэлцэл

Гадаад валютын forward арилжааны хэлцэл гэдэг нь тодорхой хэмжээний валютыг тохиролцсон ханшаар ирээдүйд нөгөө валютаар солилцохыг хэлнэ. Уг хэлцлийн мөнгөн урсгалыг тодорхойлоход валютын хэлцлийн хугацаанд хамаарах хүү, спот ханшийг ашигладаг. (Бодит байдалд бусад хүчин зүйлс, тухайлбал, гүйлгээний шимтгэл зэрэг мөнгөн урсгал гардаг боловч хялбаршуулах үүднээс энд авч үзэхгүй) Санхүүгийн байгууллага хугацааны t үед ам. доллароор евро худалдан авах forward хэлцэл хийсэн гэж үзвэл хугацааны t үед гарах мөнгөн урсгал нь хэлцэлд заасан дүнгээр шууд илэрхийлэгдэнэ. Уг мөнгөн урсгал нь тухайн санхүүгийн байгууллага хугацааны 0 үед $r_{USD,t}$ хүүтэйгээр ам. доллар зээлэн авч, $r_{ERU,t}$ хүүтэйгээр евро зээлдүүлэхтэй ижил чанартай. S нь ам. доллар, еврогийн спот ханш (хэрэв санхүүгийн байгууллагын хувьд ам. доллар үндсэн валют бол $S = USD / ERU$ гэж авч үзэв) бол forward ханш $F = S \cdot \dfrac{(1 + r_{USD,t})}{(1 + r_{ERU,t})}$ байна.

2.1.2.3. Гадаад валютын арилжааны swap хэлцэл

Уг санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалыг хүүгийн swap-ын мөнгөн урсгалыг тогтоосонтой адил байдлаар тогтооно. Тухайлбал хэлцэлд оролцогч нэг тал нь үндсэн дүнгээс тооцогдох тогтмол хүүтэй еврогийн төлбөрийг хүлээн авч, хувьсах хүүтэй ам. долларын төлбөрийг төлнө. Ялгаатай тал нь мөнгөн урсгалын 2 хэсэг өөр өөр валютаар хийгдэж, үндсэн дүнгийн төлбөр нь хэлцлийн хугацааны эхэн болон сүүлчийн хугацаанд хийгддэг. Уг санхүүгийн хэрэгслийн тогтмол хэсгийг тогтмол хүүтэй өрийн бичиг байдлаар, хувьсах хэсгийг хувьсах хүүтэй санхүүгийн хэрэгсэл байдлаар авч үзэж болно.

2.1.3. Үнэт цаас

Үнэт цаасны мөнгөн урсгалыг шууд энгийн спот позици байдлаар үндсэн валютаар илэрхийлнэ. Харин гадаадын үнэт цаасны хувьд түүнийг эзэмших хүүгийн эрсдлээс гадна гадаад валютын эрсдэл үүснэ.

2.1.4. Бараа, бүтээгдэхүүн

Бараа бүтээгдэхүүний мөнгөн урсгал ерөнхийдөө хүүгийн мөнгөн урсгалтай ижил шинж чанартай. Эрсдэл нь тухайн үеийн зах зээлийн өөрчлөлт (бараа бүтээгдэхүүнийг өнөөдөр худалдан аваад тодорхой хугацаанд хадгалах) болон ирээдүйд худалдах болон худалдан авах (тухайлбал бараа бүтээгдэхүүнийг 1 сарын дараа нийлүүлэх буюу forward) үйл явцтайгаар холбогдон гарч ирдэг.

2.1.4.1. Бараа бүтээгдэхүүний future хэлцэл

Бараа бүтээгдэхүүний future хэлцэл нь хөрөнгө оруулагчдад хялбарчилсан байдлаар ирээдүйд бараа бүтээгдэхүүнийг арилжаалах болон бараа бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэгч нарт үнэ тогтоох, эрсдэл шилжүүлэх арга хэлбэр болж өгдөг. Ийм хэлцлүүд нь зах зээлд оролцогчдод бараа бүтээгдэхүүний үнийн хугацааны бүтцийн талаар чухал мэдээллээр хангаж байдаг. Үүний мөнгөн урсгал нь бараа бүтээгдэхүүний forward хэлцлийнхтэй ижил байна.

2.2. Мөнгөн урсгалын хувиргалт

Санхүүгийн зарим хэрэгслийн мөнгөн урсгал нь зөвхөн тодорхой цөөн (хугацааны зөвхөн нэг болон хоёр үед гарах) тооны хугацаанд гарах буюу цөөн тооны мөнгөн урсгалтай байдаг бол зарим санхүүгийн хэрэгслийн онцлог байдлаас шалтгаалан олон тооны мөнгөн урсгалыг бий болгодог. Банк олон төрлийн болон олон тооны санхүүгийн хэрэгсэл эзэмшиж байгаа үед үүсэх мөнгөн урсгалын тоо маш их болдог. Үүний дүнд зах зээлийн эрсдлийг тооцоолоход мөнгөн урсгал гарах хугацаа болгонтой холбоотой үндсэн хувьсагчийн хэлбэлзэл болон тэдгээрийн хоорондын харилцан хамаарал тодорхойгүйгээс шалтгаалан тооцоолол хийх боломжгүй болох буюу холбогдох мэдээлэл байсан ч үр ашиггүй олон үйлдэл их хийх явдалд хүргэдэг. Иймд санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалтай холбоотойгоор гарах эрсдлийг илүү хялбар байдлаар хэмжихийн тулд мөнгөн урсгал гарах хугацаануудыг үндсэн хувьсагчтай хамааруулан хялбаршуулах шаардлага тавигддаг. Үүнийг мөнгөн урсгалыг уг мөнгөн урсгалын холбогдох үндсэн шинж чанарууд нь хадгалагдаж байхаар сонгон авсан тодорхой зохиомол хугацаанд хувиргалт хийх (хувиргах) гэнэ.

2.2.1. Зохиомол хугацаа

Мөнгөн урсгалд хувиргалт хийхэд өгөгдсөн зай бүхий зохиомол хугацаануудыг[8] ашигладаг. Өөрөөр хэлбэл мөнгөн урсгал бодитоор гарах хугацааны оронд зохиомол хугацааг авах ба харин үндсэн мөнгөн урсгалыг уг мөнгөн урсгалын холбогдох шинж чанарууд нь хадгалагдаж байхаар харгалзах зохиомол хугацаануудад хувиарладаг. Энэ нь мөнгөн урсгал бодитоор гарах хугацаа харъяалагдаж байгаа зохиомол хугацааны завсрын захын хугацаануудад буюу мөнгөн урсгал бодитоор гарах хугацаанд хамгийн ойр байгаа зохиомол 2 хугацаанд хувиарлана гэсэн үг юм.

Мөнгөн урсгалын хэмжээг харгалзах зохиомол хугацаанд хувиарлахдаа эрсдэл тооцоолох үйл ажиллагаагаа хялбаршуулахын тулд үндсэн 2 зарчмыг баримталдаг. Үүнд 1/Санхүүгийн шугаман болон шугаман бус хамааралтай хэрэгслийн эрсдлийг тооцоолоход ашиглаж байгаа зохиомол хугацааг одоо болон ирээдүйд аль болох тогтвортой ашиглах. 2/Зохиомол хугацаанд хамаарах үндсэн хувьсагч (тухайлбал хүүгийн түвшин)-дын хэлбэлзэл болон хоорондын харилцан хамаарлыг зах зээлээс авсан мэдээлэлд тулгуурлан урьдчилан тооцоолсон байх.

[8] Зохиомол хугацааг тооцооллыг хялбаршуулах үүднээс санхүүгийн хэрэгслийн үндсэн хувьсагчийн хугацаатай уялдуулан авдаг бөгөөд RiskMetrics-ийн хувьд 1сар 3сар 6сар 12сар 2жил 3жил 4жил 5жил 7жил 9жил 10жил 15жил 20жил 30жил гэсэн хугацааг ашигладаг.

Мөнгөн урсгалд хувиргалт хийхдээ зохиомол хугацаанд гарах мөнгөн урсгалуудад дараахь 3 нөхцөл хадгалагдаж байх ёстой. Үүнд:

1. **Зах зээлийн үнэлгээ хадгалагдаж байх:** Хувиргалт хийгдсэн мөнгөн урсгалын зах зээлийн үнэлгээ нь үндсэн мөнгөн урсгалын зах зээлийн үнэлгээтэй тэнцүү байх.
2. **Зах зээлийн эрсдэл хадгалагдаж байх:** Хувиргалт хийгдсэн мөнгөн урсгалын зах зээлийн эрсдэл нь үндсэн мөнгөн урсгалын зах зээлийн эрсдэлтэй тэнцүү байх.
3. **Шинж чанар хадгалагдах:** Хувиргалт хийгдсэн мөнгөн урсгалын шинж чанар нь үндсэн мөнгөн урсгалын шинж чанартай ижил байх. (Өөрөөр хэлбэл мөнгөн урсгалын гарах эсвэл орох шинж чанар нь хэвээр байна.)

Эрсдлийг хэмжих үед санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгалд бүхэлд нь хувиргалт хийх шаардлагатай байдаг хэдий ч зохиомол хугацаагаа зөв сонгон авсан үед ихэнх тохиолдолд мөнгөн урсгал гарах бодит хугацаа болон зохиомол хугацаа давхацдаг байна.

Мөнгөн урсгалд хувиргалт хийхдээ дараахь 2 үндсэн дүрмийг баримталдаг.

1. **Өнөөгийн үнэ цэнэ хадгалагдах:** Өөрөөр хэлбэл бодит мөнгөн урсгал t хугацаанд гарах бол t_1 ба t_2 ($t_1 < t < t_2$, $t_i \notin [t_1, t_2]$ $(i \neq 1,2)$) хугацаанд уг мөнгөн урсгалыг хувиргасан тохиолдолд t болон t_1, t_2 хугацаанд гарах мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнэ нь тэнцүү байна.
2. **Дундаж хугацаа хадгалагдах:** Өөрөөр хэлбэл t_1 ба t_2 ($t_1 < t < t_2$, $t_i \notin [t_1, t_2]$ $(i \neq 1,2)$) хугацаанд гарах мөнгөн урсгалын дундаж хугацаа нь t байх ёстой.

2.2.2. Мөнгөн урсгалыг зохиомол хугацаанд хувиргах

Үндсэн мөнгөн урсгалыг зохиомол хугацаанд хувиарлах нэг арга нь үндсэн хувьсагчийн стандарт хазайлтад суурилсан арга байдаг. Уг аргаар мөнгөн урсгалыг хувиргаснаар эрсдэл (энгийн болон delta-gamma аргачлал дахь VAR)-ийг тооцоход хазайлтыг ашигладгаараа гол ач холбогдолтой байдаг. Хувиргалт хийгдсэн мөнгөн урсгалыг ашиглан эрсдэл тооцоолох үйл ажиллагааг хялбарчлах зорилгоор тодорхой мэдээллийн баазад олон тооны зах зээл дэх санхүүгийн хэрэгслүүдийн үндсэн хувьсагчдын хазайлт, тэдгээрийн хоорондын харилцан хамаарлыг урьдчилан тооцоолсон байх шаардлагатай.

Үндсэн мөнгөн урсгал t хугацаанд гарах бол уг мөнгөн ургалыг t_1 ба t_2 ($t_1 < t < t_2$, $t_i \notin [t_1, t_2]$ $(i \neq 1,2)$) хугацаанд дараахь дараалдаар хувиргана Үүнд α нь мөнгөн урсгалыг t_1 хугацаанд хувиарлах коэффициент, $(1-\alpha)$ нь мөнгөн урсгалыг t_2 хугацаанд хувиарлах коэффициент, σ_{t_1} нь t_1 хугацааны хямдруулсан өрийн бичгийн хүүгийн хазайлт, σ_{t_2} нь t_2 хугацааны хямдруулсан өрийн бичгийн хүүгийн хазайлт, y_{t_1} нь t_1 хугацаатай хямдруулсан өрийн бичгийн хүү, y_{t_2} нь t_2 хугацаатай хямдруулсан өрийн бичгийн хүү.

1. Үндсэн мөнгөн урсгалд хамаарах өгөөжийг тооцоолох: Урьдчилан бэлтгэгдсэн мэдээлэлд буй t_1 ба t_2 хугацааны өгөөжид үндэслэн t_i хугацааны өгөөжийг шугаман хамааралтай байдлаар авч үзэж тооцоолно. Өөрөөр хэлбэл $y_{t_i} = k \cdot y_{t_1} + (1-k) \cdot y_{t_2}$ байх бөгөөд энд $k = \frac{t_2 - t_i}{t_2 - t_1}$, $(1\text{-}k) = \frac{t_i - t_1}{t_2 - t_1}$ байна.
2. Үндсэн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг тооцоолох: Өмнөх хэсэгт тооцоолсон t_i хугацааны өгөөж буюу y_{t_i}-г ашиглан бодит мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнэ P_i-г тооцоолно.
3. Үндсэн мөнгөн урсгалын хувьд үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлтыг тооцоолох: Үүнд t_i хугацаатай өгөөжийн стандарт хазайлтыг t_1 ба t_2 хугацаатай өрийн бичгийн хүүгийн стандарт хазайлтуудын шугаман хамаарал байдлаар тооцоолно. Өөрөөр хэлбэл t_i хугацаанд харгалзах стандарт хазайлт нь t_1 ба t_2 хугацаануудын стандарт хазайлтын харгалзах хугацааны завсраар жигнэсэн дундаж буюу $\sigma_{t_i} = k \cdot \sigma_{t_1} + (1-k) \cdot \sigma_{t_2}$ байх бөгөөд энд $k = \frac{t_2 - t_i}{t_2 - t_1}$, $(1\text{-}k) = \frac{t_i - t_1}{t_2 - t_1}$ байна.
4. Үндсэн мөнгөн урсгалыг хуваарилах коэфициентийг тооцоолох: $\text{Variance}(y_{t_i}) = \text{Variance}\left[\alpha \cdot y_{t_1} + (1-\alpha) \cdot y_{t_2}\right]$ байх тул эндээс $\alpha_{t_i}^2 = \alpha^2 \sigma_{t_1}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{t_1,t_2}\sigma_{t_1}\sigma_{t_2} + (1-\alpha)^2\sigma_{t_2}^2$ илэрхийлэл гарч ирнэ. Уг илэрхийлэлд зөвхөн α үл мэдэгдэгч байгаа тул $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ хэлбэртэй бичиж болно. $\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ байх бөгөөд үүнд $a = \sigma_{t_1}^2 + \sigma_{t_2}^2 - 2\rho_{t_1,t_2}\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}$, $b = 2\rho_{t_1,t_2}\sigma_{t_1}\sigma_{t_2} - 2\sigma_{t_2}^2$, $c = \sigma_{t_2}^2 - \sigma_{t_i}^2$. Эндээс α нь 2 утга авах бөгөөд бодит мөнгөн урсгалыг хуваарилахад тавигдах дээр дурьдсан нөхцлийг хангах шийдийг сонгон авч ашиглана.
5. Үндсэн мөнгөн урсгалыг зохиомол хугацаануудад хувиарлах: Дээрх шийд нь үндсэн мөнгөн урсгалыг хувиарлах коэффициент болох бөгөөд t_i-д гарах үндсэн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг α -аар үржүүлэн t_1-д хамаарах мөнгөн урсгалыг, $(1-\alpha)$ -аар үржүүлэн t_2-д хамаарах мөнгөн урсгалыг тус тус тодорхойлно.

Хавсралт

Нэгдүгээр хэсэгт эрсдэл тооцоолох аргачлалуудын талаар ерөнхий байдлаар харуулсан боловч зарим аргачлалуудад холбогдох математикийн ухагдахуунуудыг харуулаагүй. Энд дурьдагдах хавсралтуудаар Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга, Функцийн характеристик, Марицын зарим чанарууд болон Cholesky Decomposition-ийг дэлгэрүүлэн харуулна. Эдгээрээс Cholesky Decomposition нь аливаа эрсдэл тооцоолох үйл ажиллагааг энгийн аналитик хэлбэрээс матрицан хэлбэрт оруулах, матрицан хэлбэрээс аналитик хэлбэрт оруулах, мөн тооцооллыг хялбарчлах, математикийн тодорхой аргуудыг хэрэглэхэд дөхөм болгож өгдөг. Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга нь эрсдэл тооцоолох параметрэн аргуудад голчлон хэрэглэгддэг бөгөөд санхүүгийн нэг хэрэгсэл болон багцын хувьд хэлбэр нь ямар байх талаар дурьдана. Fourier (Фурье)-ийн хувиргалтын хувьд нэгдүгээр хэсэгт тухайн хувьсагчийн тархалтын функцийг олох хувиргалтыг харуулсан бол түүний гаргалгааг харуулаагүй тул энд дэлгэрэнгүй харуулна.

Хавсралт 1: Cholesky decomposition

Шугаман тэгшитгэлийн системийн шийдийг олохын тулд хувьсагчийн өмнөх коэффициентуудаар үүссэн матрицад тодорхой хувиргалт хийх шаардлага гардаг. Тухайлбал LU, Cholesky хувиргалт гэх мэт. Ингэж хувиргалт хийх гол зорилго нь тухайн матрицыг тодорхой шинж чанарыг нь алдагдуулахгүйгээр шийд олох хялбар түвшин хүртэл хувиргах асуудал байдаг. Тухайлбал $A \cdot x = B$ хэлбэрийн шугаман тэгшитгэлийн системийн бодохын тулд A хэлбэрийн матрицыг $L \cdot U = A$ буюу доод гурвалжин L, дээд гурвалжин U матрицуудын үржвэрт задална. Ингэснээр $A \cdot x = B$ тэгшитгэл нь $A \cdot x = (L \cdot U) \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b$ хэлбэрт шилжих бөгөөд тэгшитгэлийг бодохын тулд эхлээд $L \cdot y = b$ тэгшитгэлийг бодож, дараа нь $U \cdot x = y$ тэгшитгэлийг бодон шийдийг нь олно. Үүнд $A \cdot x = B$-ийг бодох асуудал нь ерөнхийдөө A-г доод ба дээд гурвалжин матрицуудын үржвэрт задлах асуудалд шилжих бөгөөд үүнийг хялбархан гаргаж болно.

Эрсдэл тооцоолж байгаа тохиолдолд ковариац (корреляц)-ын матрицад тодорхой хувиргалт хийх шаардлага гардаг ба уг матриц нь тэгш хэмтэй байдаг. Иймд хэрэв A матриц тэгш хэмтэй матриц бол LU хувиргалтаас илүү хялбар хувиргалт буюу Cholesky-ийн хувиргалтыг хэрэглэдэг. Уг хувиргалтын санаа нь LU хувиргалттай ижил боловч LU хувиргалтаар A-г доод болон доод гурвалжин матрицын үржвэр хэлбэрт бичдэг бол Cholesky-аар доод гурвалжин матриц болон түүний хөрвүүлсэн матрицуудын үржвэр хэлбэрт бичдэг. Өөрөөр хэлбэл тухайн матриц тэгш хэмтэй байгаа тохиолдолд $L \cdot L^T = A$ гэж L гэсэн доод гурвалжин матрицад шилжүүлж болно. Үүнийг зарим тохиолдолд A матрицаас язгуур авч байна гэж ярьдаг. Үүнд L матрицын элементүүд нь дараахь байдлаар олдоно.

$$L_{i,j} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 \right)^{1/2}; \quad L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk} \right), \ j = i+1, i+2, \ldots, N$$

Монте Карло аргачлалаар багцын эрсдэлийг тооцоолж байх үед n ширхэг, тодорхой A гэсэн ковариац хамаарал бүхий y санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийг үүсгэхийн тулд n ширхэг, корреляци нь нэгж матриц байх ε санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг үүсгэж, корреляцийн матрицыг Cholesky хувиргалтаар үүсгэсэн L матрицын хөрвүүлсэн матрицыг эдгээр n ширхэг хамааралгүй санамсаргүй хэмжигдэхүүнээр үүржүүлж үүсгэдэг. Өөрөөр хэлбэл $y = L^T \varepsilon$ байдлаар үүсгэнэ. Үүнд y санамсаргүй хэмжигдэхүүний корреляци нь A матриц байхыг хялбархан шалгаж болно. Өөрөөр хэлбэл $V(y) = L^T \cdot \varepsilon \cdot (L^T \cdot \varepsilon)^T$ буюу $V(y) = P^T \cdot E(\varepsilon \cdot \varepsilon^T) \cdot P = P^T I P = P^T P = A$ болж байна.

Хавсралт 2: Матрицын хувиргалтын хэрэглээ /application/

Санхүү болон эдийн засгийн аливаа судалгаа шинжилгээнд олон хүчийн зүйлсийн нөлөөллийг нэг дор авч үзэн, нэгдсэн нэг үнэлгээ гаргах шаардлага зайлшгүй гардаг бөгөөд үүний нэг жишээ нь эрсдэл тооцоолох асуудал юм. Үүнд хүчин зүйлсийн хоорондын хамаарал корреляцийн матриц буюу ковариацын матрицыг хэрэглэдэгийг нэгдүгээр хэсэгт харуулсан бөгөөд ингэхдээ тооцооллыг хялбар болгох үүднээс тухайн матрицыг тодорхой хялбар хэлбэрт оруулах шаардлага гардаг бөгөөд үүний тулд матрицын хувийн утга болон хувийн векторуудыг өргөн ашигладаг. Хувийн утга болон хувийн векторууд санхүүгийн судалгаа шинжилгээнд өргөн ашиглагддаг тул MS-EXCEL, Mathcad, Mathematica зэрэг програмуудад матрицын хувийн утга болон векторыг олох функц (тухайн програмын)-уудыг хийж өгсөн байдаг. Иймд энд матриц дээр хийгдэх үйлдлүүдэд хувийн утга болон хувийн вектор хэрхэн ашиглагддаг, түүний санаа нь юу болох талаар тодорхой хэмжээнд ойлгоц өгөх үүднээс оруууллаа.

Хувийн утга ба хувийн вектор

A нь $n \times n$ хэмжээстэй квадрат матриц бол $AX = \lambda X$ (λ -бодит тоо) шугаман тэгшитгэлийн систем тэгээс ялгаатай X гэсэн вектор шийдтэй байвал λ тоог A матрицын хувийн утга гэнэ. Тухайн λ хувийн утгад харгалзаж байгаа X вектор шийдийг A матрицын хувийн вектор гэдэг. Дээрх шугаман тэгшитгэлийн системийн матрицан хэлбэрээр $(A - \lambda I)X = 0$ хэлбэрт бичиж болно. Үүнийг A матрицын характеристик тэгшитгэл гэх бөгөөд A матрицын хувийн утгууд нь энэхүү характеристик тэгшитгэлийн язгуур (шийд)-ууд байна. Уг характеристик тэгшитгэл нь тэг гэсэн илэрхий шийдтэй боловч хувийн утга болон векторын хувьд тэгээс ялгаатай шийдүүд шаардлагатай. Шугаман тэгшитгэлийн системийн үндсэн чанаруудын нэг ёсоор $\det(A - \lambda I) = 0$ байхад шугаман тэгшитгэлийн систем тэгээс ялгаатай шийдтэй байх ёстой ба эндээс $\det(A - \lambda I) = 0$ нь λ -аас хамаарсан A матрицын хэмжээстэй тэнцүү эрэмбэтэй нэг хувьсагчийн тэгшитгэл гарна. Энэхүү тэгшитгэлийн шийд болгонд буюу λ -ийн утга болгонд A матриц хувийн вектортой байна.

Ортогональ матриц

Хоёр вектор ортогональ гэж $X_1^T \cdot X_2 = 0$ байхыг хэлнэ. Хэрэв A матриц $A^{-1} = A^T$ байвал ортогональ матриц гэх ба тэгш хэмтэй матриц ортогональ байдаг. λ_1, λ_2 нь A матрицын ялгаатай хувийн утгууд бөгөөд X_1, X_2 нь харгалзах хувийн векторууд байг. (Өөрөөр хэлбэл $A \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1$ ба $A \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot X_2$) Үүний нэгдүгээр тэнцэтгэлийг хөрвүүлбэл $(A \cdot X_1)^T = X_1^T \cdot A^T = X_1^T \cdot A$; $(\lambda_1 \cdot X_1)^T = \lambda_1 \cdot X_1^T$ буюу $X_1^T \cdot A = \lambda_1 \cdot X_1^T$ болох бөгөөд 2 талыг нь X_2-оор үржүүлбэл $X_1^T A X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$ болно. $A \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot X_2$ тэгшитгэлийн 2 талыг X_1^T -ээр үржүүлбэл $X_1^T A X_2 = \lambda_2 X_1^T X_2$ болох бөгөөд $X_1^T A X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$, $X_1^T A X_2 = \lambda_2 X_1^T X_2$ хоёр тэгшитгэлээс $X_1^T X_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ болох ба үүнд $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ тул $X_1^T X_2 = 0$ байна. Ингэснээр A гэсэн $n \times n$ хэмжээстэй матрицын хувьд түүний ялгаатай 2 хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторууд ортогональ болох нь харагдлаа.

Матрицын хувиргалтад өргөн хэрэглэгддэг өөр нэг шинж чанар бол $n \times n$ хэмжээстэй A матриц ортогональ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний багануудын векторууд ортогональ нормчлогдсон байдаг. Уг шинж чанарыг ашиглан хэрэв квадрат матриц ялгаатай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ гэсэн ялгаатай хувийн утгуудтай бол түүнд харгалзах n ширхэг хувийн векторуудын элемент бүрийг тэдгээрийн модульд харьцуулбал харилцан ортогональ, нормчлогдсон векторуудыг үүсгэж болно. Эдгээр векторуудаар үүсгэгдсэн матриц нь ортогональ байх бөгөөд ерөнхийдөө A матриц ортогональ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь түүний баганы векторууд ортогональ нормчлогдсон байх явдал байдаг.

Матрицыг диогнальчлах

Матрицыг диогнальчилснаар эрсдлийн тооцооллыг хялбар, цэгцтэй болгох буюу хийгдэх үйлдлийн тоог багасгах, хялбаршуулахаас гадна тухайн эрсдлийн тооцооллын талаар ойлголт авахад чухал ач холбогдолтой юм. Өөрөөр хэлбэл олон хүчин зүйлсийн нөлөөллийг судалж байхад нэг хүчин зүйлс бүр дээрх бичиглэлийг тэдгээрийн ковариац (зарим тохиолдолд корреляци)-ыг матрицын диогналь хэлбэрт шилжүүлсэн хувиргалтыг ашиглан матрицан байдлаар буюу ерөнхий байдлаар бичихэд хялбар болдог. Матрицыг диогналь хэлбэрт шилжүүлэх буюу A матриц диогнальчлагдах гэдэг нь $Q^{-1} A Q = D$ (өөрөөр хэлбэл $AQ = QD$) байх Q гэсэн бөхөөгүй матриц байгаа тохиолдолд хэлэх бөгөөд Q матрицыг A-г диогнальчлагч матриц гэнэ. (Энд D нь диогналь матриц) D матрицын баганы элементүүд $d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}$ бөгөөд Q матрицын багануудыг $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ гэж тэмдэглэвэл $AQ = [AQ_1, AQ_2, ..., AQ_n]$, $QD = [d_{11}Q_1, d_{22}Q_2, ..., d_{nn}Q_n]$ болох бөгөөд эндээс марицын харгалзах элементүүд нь тэнцүү байх тул $AQ_1 = d_{11}Q_1$, $AQ_2 = d_{22}Q_2$, ..., $AQ_n = d_{nn}Q_n$ болно. Өөрөөр хэлбэл энэ хавсралтын эхний хэсэгт харуулсанаар Q_i $(i = 1, ..., n)$ нь баганан матриц буюу векторууд тул d_{ii} $(i = 1, ..., n)$ нь A матрицын хувийн утгууд болох нь харагдаж байна. Энэхүү хувийн утгуудад харгалзах хувийн векторууд нь Q_i $(i = 1, ..., n)$ байна. Q-г бөхөөгүй гэж үзэж байгаа тул Q_i $(i = 1, ..., n)$-үүд нь харилцан шугаман хамааралгүй векторууд болно. Эндээс үзэхэд A матрицыг диогнальчлагч Q матриц нь A матрицын хувийн векторуудаар үүсгэсэн матриц болж байна. Ерөнхий тохиолдолд $n \times n$ хэмжээстэй A матриц диогнальчлагдах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь n ширхэг шугаман хамааралгүй хувийн ветортой байна.

Хэрэв A матриц тэгш хэмтэй бол диогнальчлагдах буюу шугаман хамааралгүй n хувийн вектор үргэлж олдоно. Үүнээс гадна харилцан ортогональ n ширхэг хувийн векторуудыг олж чадна. Иймд Q гэсэн ортогональ матрицыг ашиглан A матрицыг диогнальчилж болдог. Үүнээс үүдэн A тэгш хэмтэй матрицыг ортогональ диогнальчлагдах матриц гэдэг. A диогнальчлагдана гэдэг нь $Q^{-1} A Q = D$ (өөрөөр хэлбэл $AQ = QD$) Q гэсэн ортогональ буюу $Q^{-1} = Q^T$ байх матриц олдох ёстой бөгөөд үүнээс A диогнальчлагдана гэдэг нь $A = QDQ^T$ байх ёстой байдаг. A матрицыг хөрвүүлбэл $A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T$ болох бөгөөд энэ нь A матрицтай тэнцүү. Иймд матриц ортогональ диогнальчлагдаж байвал тэр нь тэгш хэмтэй матриц байх нь үнэн байна. Үүний урвуу өгүүлбэр буюу хэрэв A тэгш хэмтэй матриц бол ортогональ диогнальчлагдах нь мөн үнэн байдаг. Өөрөөр хэлбэл A матриц ортогональ диогнальчлагдах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь A тэгш хэмтэй байх явдал юм.

Хавсралт 3: Фурьегийн хувиргалт

Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний үндсэн хувьсагчаас хамаарсан хамаарал нь шугаман бус буюу үнэлгээний функцийг Тейлорын цувуугаар задлахад квадрат хэлбэртэй байдаг тухай өмнө дурьдсан. Зах зээлийн эрсдлийн тооцоололд үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтийг нормаль тархалттай гэж үздэг бөгөөд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ нь үндсэн хувьсагчаас шугаман байдлаар хамаарсан тохиолдолд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ мөн нормаль тархалттай байдаг. Харин шугаман бус хамааралтай буюу шугаман болон квадрат хэлбэрийн нийлбэр байдлаар хамаарсан тохиолдолд санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн тархалт тодорхойгүй байна. Өөрөөр хэлбэл нормаль тархалттай хувьсагч болон түүний квадратуудын нийлбэр ямар тархалттай байх асуудлыг шийдэх хэрэгтэй болох ба үүнийг Gamma функцийн тусламжтайгаар гаргаж авдаг.

Gamma функц, χ^2 тархалт

Нормаль тархалттай хэмжигдэхүүний квадрат хэмжигдэхүүн нь χ^2 тархалттай байдаг бөгөөд уг тархалтын магадлалын нягтын функц нь gamma функцээр илэрхийлэгддэг. $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ -ийг gamma функц гэх бөгөөд үүнээс хэсэгчилсэн интеграл авбал $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ болно. Энэхүү чанарт үндэслэн $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$, $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1) = (n-1)!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ байхыг хялбархан харж болно. Хэрэв $\gamma_1(x) = \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)}$ $0 < x < \infty$ функцийг авч үзвэл энэ нь нягтын функцийн чанарыг хангах нь тодорхой байна. γ_1 функцэд $z = \beta x$, $n = \alpha$ орлуулга хийвэл $\gamma_2(x) = \gamma_1(x(z))\left|\dfrac{dx}{dz}\right| = \gamma_1\left(\dfrac{z}{\beta}\right)\left|\dfrac{d(z/\beta)}{dz}\right|$ буюу $\gamma_2(x) = \dfrac{e^{-z/\beta}(z/\beta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{e^{-z/\beta} z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$ хэлбэртэй болно. Үүнд дахин $\alpha = r/2$ $r \in \{0,1,2,\ldots\}$ гэсэн орлуулга хийвэл γ_2 функц нь $\chi^2(r) = \dfrac{e^{-x/2} x^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}$ болох бөгөөд үүнийг хи-квадрат (chi-square) тархалт гэж нэрлэдэг.

Тейлорын цуваагаар үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт үндсэн хувьсагчийн харьцангуй өөрчлөлтөөс $r' = \tilde{\delta} r + 0.5 \cdot \tilde{\Gamma} r^2$ байдлаар хамаарах бөгөөд r нь нормаль тархалттай байна гэж үздэг. Үүнээс үзэхэд r' -ийн тархалтыг мэдэхийн тулд r^2 -ийн тархалтыг мэдэх шаардлага гарч ирж байна. Хэрэв $r : N(0,1)$ бөгөөд r -ийг ивээгч эгэл үзэгдэл нь $A=\{-\theta<r<\theta\}$ бол $y=r^2$-ийг ивээгч эгэл үзэгдэл $A=\{0<y<\theta^2\}$ болно. Эндээс A үзэгдлийн магадлал нь $P(A)=2\int_0^{\theta}N(r)dr=2\int_0^{\theta^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2}dr$ буюу $y=r^2$-ийг ашиглавал $P(A)=2\int_0^{\theta^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\frac{1}{2}y^{-1/2}dy$ болно. Сүүлийн илэрхийллийн интеграл доторх илэрхийллийг хураангуйлан бичвэл $f(y)=\frac{e^{-y/2}y^{1/2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}$ буюу $f(y)=\frac{e^{-y/2}y^{1/2}}{\Gamma(1/2)2^{1/2}}$ болно. Энэ нь $\chi^2(1)$ тархалт буюу $r^2:\ \chi^2(1)$ байна.

Функцийн характеристик

Фурьегийн хувиргалт болон урвуу хувиргалтууд нь функцийн характеристикийг олох асуудалд шилжих бөгөөд хэрэв тухайн нягтын функцийн характеристикийг олж чадаж байвал тухайн нягтын функцийг олж чаддаг. Санхүүгийн шугаман бус хэрэгслийн хувьд $r'=\tilde{\delta}r+0.5\cdot\Gamma r^2$ байх бөгөөд r' хэмжигдэхүүний характеристик тэгшитгэлийг олох шаардлагатай. Өөрөөр хэлбэл $E(e^{s(az+\lambda z^2)})$-ийг олох шаардлагатай бөгөөд үүнд r-ийг хялбарчлан стандарт нормаль (ерөнхий тохиолдолд нормаль тархалттай байх бөгөөд энэ тохиолдолд стандарт нормаль тархалт руу хялбархан шилжүүлж болно) тархалттай байна гэж авбал характеристик тэгшитгэл дараахь хэлбэртэй болно.

$$E(e^{s(ax+\lambda x^2)})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{s(ax+\lambda x^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(s(ax+\lambda x^2)-x^2/2)dx$$

Дээрх илэрхийллийг орлуулга хийх үүднээс хураангуйлан бичвэл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(s(ax+\lambda x^2)-x^2/2)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{2sax+2\lambda x^2-x^2}{2}\right)dx$ буюу

$$E(e^{s(az+\lambda z^2)})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(x\sqrt{1-2\lambda s}-\frac{sa}{\sqrt{1-2\lambda s}}\right)^2-\frac{s^2a^2}{1-2\lambda s}}{2}\right)dx$$

болох бөгөөд үүнд $k=x\sqrt{1-2\lambda s}-\frac{sa}{\sqrt{1-2\lambda s}}$ гэсэн орлуулга хийвэл $x=\frac{k}{\sqrt{1-2\lambda s}}-\frac{sa}{1-2\lambda s}$ байх ба дээрх илэрхийлэл дараахь хэлбэртэй болно.

$$E(e^{s(az+\lambda z^2)})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2-\frac{s^2a^2}{1-2\lambda s}}{2}\right)d\left(\frac{k}{\sqrt{1-2\lambda s}}-\frac{sa}{1-2\lambda s}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda s}}\exp\left(-\frac{s^2a^2}{2(1-2\lambda s)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)dk$$

. Үүний сүүлчийн интегралтай хэсэг нь $\sqrt{2\pi}$ -тэй тэнцүү тул $E(e^{s(az+\lambda z^2)})=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda s}}\exp\left(-\frac{s^2a^2}{2(1-2\lambda s)}\right)$ байна.

Фурьегийн хувиргалт

Нэгж хугацаан дахь санхүүгийн хэрэгслүүдийн үндсэн хувьсагчдын харьцангуй өөрчлөлтийн вектор нь $X = [X_1,...,X_k]^T$, энэхүү хугацаан дахь багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт $f(X)$ бөгөөд $X : N^k(0,\Sigma)$ буюу Гауссын тархалттай байг. Энэ нөхцөлд нэгдүгээр хэсэгт үзүүлсэнээр $f(X)$-ийн delta-gamma ойролцоолол нь дараахь хэлбэртэй байна.

$$Y = a_1^T X + X^T B_1 X$$

Үүнд a_1 нь $k\times 1$ вектор, B_1 нь $k\times k$ матриц. (Энд Тейлорын цувааны квадрат хэлбэрийн 1/2 үржигдэхүүнийг оруулаагүйгээр бичив) a_1, B_1 нь $f(X)$-ийн нэг болон хоёрдугаар зэргийн уламжлалуудаар үүссэн матрицууд бөгөөд B_1 нь тэгш хэмтэй байх тул ковариац Σ-тай нэгэн адилаар тогтмол, мэдэгдэж байгаа. Y хэмжигдэхүүний тархалтын функцийн Фурьегийн хувиргалтыг гаргахын тулд $Y = a_1^T X + X^T B_1 X$ илэрхийллийг хялбарчлах үүднээс X векторт Cholesky Decomposition-ийг хэрэглэнэ. Хавсралт 1-д дурьдсанаар X-ийг $X = HZ_1$ байдлаар үүсгэх бөгөөд үүнд H нь $\Sigma = HH^T$ байх гурвалжин матриц. Ингэснээр Z_1 нь $k\times 1$ байх баганан үл хамаарах стандарт нормаль вектор болно. Ерөнхийдөө Cholesky Decomposition нь тооцоолол хялбарчлах зорилготой боловч энэ тохиолдолд уг хувиргалтаар тооцоолол багасахгүй бөгөөд гол зорилго нь үл хамааран стандарт нормаль хэмжигдэхүүн гарган авах юм. Үүний үндсэнд $Y = a_1^T X + X^T B_1 X$ илэрхийлэл нь дараахь хэлбэртэй болно.

$$Y = a_1^T(HZ_1) + (HZ_1)^T B_1 (HZ_1) = a_2^T Z_1 + Z_1^T B_2 Z_1$$

Үүнд $a_2 = H^T a_1$, $B_2 = H^T B_1 H$. Үүнд B_2 нь мөн тэгш хэмтэй матриц гарна. (Гэвч зарим тохиолдолд багц нь урт болон богино позицитой байж болох бөгөөд энэ нөхцөлд B_2 нь тэгш хэмтэй байсан ч эерэг тодорхойлогчтой байхгүй байна.) Иймд уг матрицад бодит $-\infty < \lambda_1 \le ,...,\le \lambda_k < \infty$ хувийн утга байх бөгөөд эдгээрт харгалзах харгалзан ортогональ бодит $P_1,...,P_k$ хувийн векторуудтай байна. Эдгээр веторуудаар B_2 матрицыг диогнальчлах үүднээс $P = cbind(P_1,...,P_k)$ матрицыг хавсралт 2-т зааснаар үүсгэх бөгөөд B_2 матрицыг дараахь хэлбэртэй бичиж болно.

$$B_2 = P\Lambda P^T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j P_j^T$$

Үүнд $\Lambda = diag(\lambda_1,...,\lambda_k)$ нь B_2 матрицын хувийн утгуудаар үүссэн диогналь матриц. Үүнийг ашиглан $Y = a_2^T Z_1 + Z_1^T B_2 Z_1$-ийг дараахь хэлбэртэй бичиж болно.

$$Y = a_2^T P P^T Z_1 + Z_1^T P \Lambda P^T Z_1 = a^T Z + Z^T \Lambda Z$$

Үүнд $a = P^T a_2 = P^T H^T a_1$ ба $Z = P^T Z_1$. Дээрх илэрхийлэл дэх $Z = [Z_1,...,Z_k]^T$ нь мөн үл хамаарах стандарт нормаль гишүүдээс бүрдэнэ. Эдгээрийн дүнд $Y = a^T Z + Z^T \Lambda Z$ илэрхийллийг дараахь хэлбэртэй бичих болож бүрдэнэ.

$$Y = \sum_{j=1}^{k} (a_j Z_j + \lambda_j Z_j^2)$$

Дээрх илэрхийлэлд a_j-үүд нь $P^T H^T a_1$ матрицын гишүүд, λ_j-үүд нь $H^T B_1 H$ матрицын хувийн утгууд болно. $Y = \sum_{j=1}^{k} (a_j Z_j + \lambda_j Z_j^2)$-ийн $a_j Z_j + \lambda_j Z_j^2$-ийн Фурьегийн хувиргалт нь $E(e^{s(az+\lambda z^2)})=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda s}}\exp\left(-\frac{s^2a^2}{2(1-2\lambda s)}\right)$ байхыг өмнөх хэсэгт харуулсан бөгөөд Z_i-үүд үл хамааран хувьсагчид тул $Y=\sum_{j=1}^{k}(a_jZ_j+\lambda_jZ_j^2)$-ийн фурьегийн хувиргалт дараах хэлбэртэй байна.

$$E(e^{itY})=\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{1-2i\lambda_jt}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a_j^2t^2}{1-2i\lambda_jt}\right) \text{ буюу}$$

$$E(e^{itY})=\left[\det(I-2itB_2)\right]^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a_j^2t^2}{1-2i\lambda_jt}\right) \text{-тэй тэнцүү чанартай}$$

Дээрх илэрхийллийг матрицан хэлбэрээр анхны a_1 болон B_1 хувьсагчдыг ашиглан бичих нь илүү тохиромжтой байдаг бөгөөд энэ нь дараах 2 хувиргалтуудаас гарч ирнэ. (Өөрөөр хэлбэл $Y=a_1^TX+X^TB_1X$ -д хийсэн матрицын хувиргалтуудыг буцаан хийх замаар a_1, B_1 хувьсагчдаар илэрхийлж бичнэ.) Үүнд:

Нэгдүгээрт:

$$\begin{aligned}\det(I-2itB_2)&=\det(I-2itH^TB_1H)\\&=\det\{H^T[(H^T)^{-1}H^{-1}-2itB_1]H\}\\&=\det H^T\det[(H^T)^{-1}H^{-1}-2itB_1]\det H\\&=\det\Sigma\det(\Sigma^{-1}-2itB_1)\\&=\det(I-2it\Sigma B_1)\ \text{áóþ ó}\ \det(I-2itB_1\Sigma)\end{aligned}$$

Хоёрдугаарт:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j^2}{1-2i\lambda_jt}&=a^T(I-2it\Lambda)^{-1}a\\&=a^TP^TP(I-2it\Lambda)^{-1}P^TPa\\&=a_2^T[P(I-2it\Lambda)P^T]^{-1}a_2\\&=a_2^T(I-2itB_2)^{-1}a_2\\&=a_1^TH(I-2itH^TB_1H)^{-1}H^Ta_1\\&=a_1^T(\Sigma^{-1}-2itB_1)^{-1}a_1\\&=a_1^T(I-2it\Sigma B_1)^{-1}\Sigma a_1\ \text{áóþ ó}\ a_1^T\Sigma(I-2itB_1\Sigma)^{-1}a_1\end{aligned}$$

Эдгээрэс Y хувьсагчийн Фурьегийн хувиргалт нь дараах хэлбэртэй болно.

$$E(e^{itY})=\left[\det(I-2it\Sigma B_1)\right]^{-1/2}\exp\left[-\tfrac{1}{2}t^2a_1^T(\Sigma^{-1}-2itB_1)^{-1}a_1\right]$$

Санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээний функцаас хамаарч санхүүгийн хэрэгсэлийн үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нормаль тархалттай байдаггүй. Тухайлбал $N(r'_{i,t})$ нь $r'_{i,t}$-ийн нягтын функц байвал уг функцийн Фурьегийн урвуу хувиргалт нь дараах хэлбэртэй байна.

$N(r')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iur'}M(iu)du$ (Энд $r'_{i,t}$-ийг товчоор r' гэж тэмдэглэв.) Өөрөөр хэлбэл тухайн функцийн Фурьегийн хувиргалтаар гарах функц болон тухайн функцуудийг харгалзан тухайн функц болон Фурьегийн хувиргалтаар гарсан функцуудаар харилцан нэг утгатай олж болдог.

Хавсралт 3: Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга

Ажиглалтын хугацааны t үеийн хувьд магадлал буюу хамгийн их үнэний хувь нь дараахь байдалтай байна.

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2h_t^2} \right)$$

Эндээс ажиглалтын нийт хугацаанд харгалзах хамгийн их үнэний хувь нь дээрх хугацааны үе тус бүрийн ажиглалтын магадлалуудын үржвэр байна.

$L = \prod_{t=1}^{n} l_t = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2h_t^2} \right)$ буюу натураль логарифм авбал $\ln L = \sum_{t=1}^{n} \ln l_t = \sum_{t=1}^{n} \left[-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln h_t^2 - \frac{1}{2}\frac{r_t^2}{h_t^2} \right]$ болно. Энд h_t хэмжигдэхүүн нь параметрээр илэрхийлэгдсэн байгаа бөгөөд дээрх ажиглалтын n ширхэг хугацаанд харгалзах магадлалуудын нийлбэрчилсэн ω, α, β параметрүүдийг агуулсан (дээрх нийлбэрт зөвхөн эдгээр параметрүүд хувьсагч байдлаар оролцоно) lnL функцийг хамгийн их байлгах ω, α, β параметрүүдийн утгыг олно.

Багцын эрсдлийг GARCH аргачлалаар тооцоолохын тулд нэг санхүүгийн хэрэгслийн GARCH аргатай адил параметрүүдийг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар олох шаардлага гардаг. Багц n ширхэг санхүүгийн хэрэгслээс тогтож, ажиглалтын тоо m бол багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийн тархалтын нягтын функц дараахь хэлбэртэй байна.

$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(H_t)}} \exp\left(\frac{-r_t' H_t^{-1} r_t}{2} \right)$. Үүнд $\det A$ нь A матрицын тодорхойлогч.

Эндээс багцын хамгийн их үнэний хувь бухий функц нь дараахь хэлбэртэй байна.

$L = \prod_{t=1}^{m} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(H_t)}} \exp\left(\frac{-r_t' H_t^{-1} r_t}{2} \right)$. Уг илэрхийллийг хялбарчлах үүднээс натураль логарифм авбал хамгийн их үнэний хувь бүхий функц дараахь хэлбэртэй болно.

$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{m} \left(n\ln(2\pi) - \ln|H_t| - r_t' H_t^{-1} r_t \right)$. Дээр дурьдсан багцын GARCH аргачлалуудад H_t $(t = 1,...,m)$ болгон нь параметрэн матрицаас хамаарсан байх бөгөөд $\ln L$ -ийг хамгийн их байлгах параметрүүдийг үнэлнэ. Өргөтгөсөн буюу багцын GARCH аргачлалуудад тооцооллыг хялбаршуулах үүднээс H_t-г олох аргад харгалзуулан хамгийн их үнэний хувь бүхий дээрх функцэд хувиргалт хийнэ.

Жишээ

Энд эрсдэл тооцоолох зарим энгийн аргачлалуудыг ашиглаж гадаад валютаар илэрхийлэгдсэн санхүүгийн хэрэгслийн үнийн эрсдлээс хүлээх алдагдалыг тооцоолоход жишээ гарган үзүүллээ. Зарим аргачлал тухайлбал hetroschedastic загвар ашигладаг болон Johnson transform, Monte-Carlo зэрэг аргачлалуудаар эрсдэл тооцоолоход нэлээд нүсэр тооцоолол хийдэг тул тусгай эрсдэл тооцоолох программ хангамж ашиглах шаардлагатай байдаг. Иймд тооцоолол бага гардаг болон энгийн аргачлалууд болох Historical simulation, Delta-Normal-д жишээ гаргасан бөгөөд үйл ажиллагаа явуулж байгаа манай нэг банкны энэ оны үзүүлэлтэд тулгуурлан жишээг гаргалаа. Өнөөгийн байдлаар манай банкуудын арилжааны зорилгоор эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслүүд нь голчлон валютын ханшийн эрсдэлд орж байгаа бөгөөд бусад, тухайлбал, үнэт цаасны үнийн, хүүгийн зэрэг эрсдэлд орох боломж бага юм. Банкуудын ихэнх хүү тогтмол шинж чанартай байгаа нь хүүгийн эрсдэлд орох боломж бага байх нөхцлийг бүрдүүлж байна. Иймд энд авч үзэх жишээ нь гадаад валютаар илэрхийлэгдсэн санхүүгийн хэрэгслийн үнийн хэлбэлзлэлээс хүлээж болзошгүй алдагдлыг тооцоолоход голчлон чиглэгдсэн болно.

Банкуудын гадаад активууд ихэвчлэн USD, CHY, EUR, GBP, CHF, JPY-ээр илэрхийлэгдэж байгаа бөгөөд тайлангаа мөн дээрх валютууд болон бусад гадаад валют гэсэн байдлаар гаргаж байгаа. Бусад гадаад валютуудыг USD-ээр илэрхийлэн харуулж байгаа тул бусад гадаад валютуудын нийт дүнг жишээнд USD-д оруулан тооцлоо. Мөн үндсэн хувьсагч буюу ханшийг нийт 388 өдрийн байдлаар авч үзсэн. (Банкны гадаад валютын позицийн тайлан болон үндсэн хувьсагч буюу ханшийн ажиглалтын утгуудыг хураангуйлан хавсаргав.)

Жишээ 1: Historical simulation

Энэ аргачлалыг хамгийн энгийн гэж үзэж болох бөгөөд гол давуу тал нь тооцоолол хийх бараг шаардлагагүй байдгаараа давуу талтай ба богино хугацаанд тухайн санхүүгийн хэрэгслийн эрсдлийн талаар тодорхой ойлгоц авах зорилгоор ашиглахад тохиромжтой юм. MS-Excel болон бусад хэрэглээний программ хангамжид тодорхой олонлогоос аливаа магадлалд харгалзах утгыг шууд олох функцуудыг хийж өгсөн байдаг. Тухайлбал MS-Excel-ийн хувьд PERCENTILE функц нь энэ үйлдлийг гүйцэтгэх бөгөөд нэгдүгээр хэсэгт дурьдсанчлан олонлогт тодорхой интервалд гарах давтамжаар магадлалын утгыг нь гаргах шаардлагагүй. Өөрөөр хэлбэл энэ үйлдлийг PERCENTILE функц илүү нарийн тодорхой байдлаар өөрөө автоматаар хийдэг гэсэн үг юм. Энэ жишээнд PERCENTILE функцийн ашиглан гарсан үр дүнг дор үзүүлэв.

	USD/MNT	CHY/MNT	EUR/MNT	GBP/MNT	CHF/MNT	JPY/MNT
5% итгэх магадлал	0.000000000	-0.000386548	-0.009963596	-0.007399493	-0.009484367	-0.008929863
Позици	858,915,571.80	0.00	24,189,055.17	150,290,398.12	231,905,107.49	446,237,259.23
ХБА	0.00	0.00	-241,009.96	-1,112,072.76	-2,199,473.06	-3,984,837.79
ХБА/ӨХ	0.00000%	0.00000%	-0.00375%	-0.01732%	-0.03426%	-0.06207%
Өөрийн хөрөнгө	6,419,533,475.7					

Уг аргачлалын дутагдалтай тал нь олонлогийг авахдаа хэмжээсийг нь ямар хэмжээтэйгээр авах нь тодорхойгүй байх бөгөөд үүнийг банкны ажилтан нь тохиромжтой байдлаар сонгож авах шаардлага гардаг. Үүнээс гадна дээрх жишээнд USD-ийн позици хамгийн их хэмжээтэй байгаа боловч түүнээс 1 хоногийн дотор хүлээж болзошгүй алдагдал тэгтэй тэнцүү байна. Энэ нь

USD/MNT-ийн ажиглалтын утгуудыг ямар хэмжээтэй авснаас шалтгаалж байгаа бөгөөд дээрх жишээнд 388-аар авсан. Хэрэв ажиглалтын утгын тоог 290-ээр авбал үр дүн нь дараахь байдлаар өөрчлөгдөнө.

	USD/MNT	CHY/MNT	EUR/MNT	GBP/MNT	CHF/MNT	JPY/MNT
5% итгэх магадлал	-0.000482668	-0.000855472	-0.010147327	-0.007740576	-0.010845177	-0.008995577
Позици	858,915,571.80	0.00	24,189,055.17	150,290,398.12	231,905,107.49	446,237,259.23
ХБА	-414,570.95	0.00	-245,454.24	-1,163,334.25	-2,515,051.93	-4,014,161.69
ХБА/ӨХ	-0.00646%	0.00000%	-0.00382%	-0.01812%	-0.03918%	-0.06253%

Дээрх хүснэгтээс үзэхэд ам. доллараас 1 хоногийн дотор хүлээж болзошгүй алдагдал *414.6* мянган төгрөг болсон байна. Эндээс уг аргачлалд ажиглалтын утгын тоог ямар хэмжээтэйгээр авах нь гол хүндрэлтэй асуудал байдаг нь харагдаж байна.

Багцын хувьд эрсдлийг дээрх байдлаар нэг валютын хувьд тооцсонтой ижил байдлаар тооцоолно. Үүний тул эхлээд багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлтийг гарган авах шаардлагатай. Тухайлбал ажиглалтын сүүлчийн хугацааны багцын үнэлгээний харьцангуй өөрчлөлт нь дараахь байдалтай байна.

	USD/MNT	CHY/MNT	EUR/MNT	GBP/MNT	CHF/MNT	JPY/MNT
Позици	858,915,571.80	0.00	24,189,055.17	150,290,398.12	231,905,107.49	446,237,259.23
Багцад эзлэх хувь	50.2%	0.0%	1.4%	8.8%	13.5%	26.1%
Үндсэн хувьсагчдын харьцангуй өөрчлөлт	0.00000000	-0.00002416	-0.00689207	0.00224100	-0.00081400	-0.00125214
Багцын харьцангуй өөрчлөлт	-0.00033738					

Багцын харьцангуй өөрчлөлт нь санхүүгийн хэрэгсэл тус бүрийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийг тэдгээрийн багцад эзлэх хувиар үржүүлэн нэмсэнтэй тэнцүү байх бөгөөд энэ жишээнд -0.00033739 буюу -0.033739% байна. Ийм байдлаар ажиглалтын утга тус бүр дэх багцын харьцангуй өөрчлөлтийг гарган авч болно. Энэхүү багцын харьцангуй өөрчлөлтөөр үүсэх ажиглалтын утгуудад MS-Excel-ийн хувьд PERCENTILE функцийг хэрэглэх бөгөөд уг жишээнд -0.00333 гарч байна. Энэ нь 5 хувийн итгэх магадлалтай багцын өөрчлөгдөж болзошгүй хамгийн их хэмжээ тул эндээс багцын эрсдэлийг тооцоолбол (багцын нийт хэмжээ $1{,}711{,}537{,}391.81$ төгрөг байгаа) $0.00333 \times 1{,}711{,}537{,}391.81 = -5{,}706{,}729.97$ төгрөг гэж гарна.

Жишээ 2: Delta-Normal аргачлал

Уг аргачлал нь зөвхөн санхүүгийн шугаман хамааралтай хэрэгслүүдийн эрсдэлийг тооцоолоход ашиглагдах тул option хэлцлийг энд авч үзэхгүй. Тайлант сарын байдлаар банкны гадаад валютын позици болон гадаад валютуудын төгрөгтэй харьцах ханшийн вариац нь валют тус бүрээр дараахь байдалтай байна гэж үзье.

	USD	CHY	EUR	GBP	CHF	JPY
Позици	858,915,571.8	0.0	24,189,055.2	150,290,398.1	231,905,107.5	446,237,259.2
Хэлбэлзэл*	0.000471445	0.000485342	0.005570175	0.004530282	0.006114368	0.006049665
ӨХ	6,419,533,475.7					

*-Дээрх хэлбэлзэл нь тухайн гадаад валюттай харьцах төгрөгийн ханшийн харьцангуй өөрчлөлтийн хэлбэлзэл юм.

Энд USD/MNT-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн хэлбэлзэл буюу стандарт хазайлт нь *0.00047* байгаа тул USD-ийн позици ханш хоёр нь хоорондоо шугаман хамааралтай тул 5 хувийн итгэх магадлалтайгаар USD/MNT-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн авах хамгийн их утга нь $0.00047 \times 1.66 = 0.000783$ болно. Энэ нь мөн ханшийн харьцангуй өөрчлөлт тул USD-ийн позициос 1 хоногийн дараа алдаж болох хэмжээ нь $858,915,571.8 \times 0.000783 = 672,185.9$ байна. Өөрөөр хэлбэл банк USD-ийн өнөөдрийн барьж байгаа $858,915,571.8$ төгрөгтэй тэнцэх хэмжээний позициос 1 хоногийн дотор 5 хувийн итгэх магадлалтайгаар хамгийн ихдээ $672,185.9$ төгрөг алдаж болзошгүй юм. Үүнтэй адилаар валют тус бүрийн хувьд ханшийн өөрчлөлтөөс гарч болзошгүй эрсдэлийг тус тусад нь тооцоолж болно. Ингэж тооцоолсон байдлыг дараахь хүснэгтээр үзүүлэв.

	USD	CHY	EUR	GBP	CHF	JPY
Позици	858,915,571.8	0.0	24,189,055.2	150,290,398.1	231,905,107.5	446,237,259.2
Хэлбэлзэл	0.0004714	0.0004853	0.0055702	0.0045303	0.0061144	0.0060497
5%-тай итгэх хэмжээ	0.0007826	0.0008057	0.0092465	0.0075203	0.0101499	0.0100424
ХБА	672,185.9	0.0	222,316.5	1,130,224.1	2,353,802.1	4,481,312.6
ХБА/ӨХ	0.01047%	0.00000%	0.00346%	0.01761%	0.03667%	0.06981%
ӨХ	6,419,533,475.7					

Эндээс үзэхэд JPY/MNT-ийн өөрчлөлтөөс банк 1 хоногийн дотор 5 хувийн итгэх магадлалтайгаар *0.0698* хувийг алдаж болзошгүй байгаа нь бусад валюттай харьцуулахад хамгийн өндөр үзүүлэлт болох нь харагдаж байна. Валют тус бүрийн ханшийн хэлбэлзэлээс хүлээж болзошгүй алдаглуудыг нэмбэл өөрийн хөрөнгийн *0.138* хувь болно. Гэвч энэ нь валют тус бүрийн хоорондын харилцан cross ханшууд ямарч хамааралгүй буюу корреляцийн коэффициент нь 0 үед ийм байдлаар гадаад валютын ханшийн өөрчлөлтүүдээс хүлээж болзошгүй алдагдлыг тооцоолно. Харин бодит байдалд USD/MNT болон EUR/MNT нь хоорондоо хамааралтай байдаг. Энэхүү хамаарал нь эерэг болон сөрөг байж болох ба энэхүү хамаарлын нөлөөллийг гадаад валютын ханшийн өөрчлөлтөөс хүлээж болзошгүй нийт алдаглыг тооцоолоход оруулах шаардлагатай. Үүний тул төгрөгтэй харьцаж байгаа гадаад валют тус бүрийн ханшийн харьцангуй өөрчлөлтүүдийн ковариацын матрицыг тооцоолох шаардлагатай. Энэхүү тооцооллыг дор үзүүлэв.

	USD/MNT	CHY/MNT	EURO/MNT	GBP/MNT	CHF/MNT	JPY/MNT
USD/MNT	0.00000022	0.00000022	0.00000017	0.00000016	0.00000030	0.00000013
CHY/MNT	0.00000022	0.00000024	0.00000017	0.00000016	0.00000031	0.00000018
EURO/MNT	0.00000017	0.00000017	0.00003104	-0.00001777	-0.00003149	-0.00001894
GBP/MNT	0.00000016	0.00000016	-0.00001777	0.00002050	0.00001892	0.00001132
CHF/MNT	0.00000030	0.00000031	-0.00003149	0.00001892	0.00003739	0.00002217
JPY/MNT	0.00000013	0.00000018	-0.00001894	0.00001132	0.00002217	0.00003646

Эндээс багцын хүлээж болзошгүй эрсдэлийг 2 байдлаар тооцоолж болно. Нэгдүгээрт: дээрх ковариацын матрицыг шууд позицийн дүнд болон 5 хувийн итгэх магадлалд харгалзах хэмжигдэхүүнээр үржүүлэх байдлаар тооцоолно. Хоёрдугаарт: Ковариацын матрицыг багцад эзлэх хувиар болон 5 хувийн итгэх магадлалд харгалзах хэмжигдэхүүнээр үржүүлсэний дараа позицийн нийт дүнд үржүүлж тооцоолж болно.

	USD/MNT	CHY/MNT	EURO/MNT	GBP/MNT	CHF/MNT	JPY/MNT
Позици	858,915,571.8	0.0	24,189,055.2	150,290,398.1	231,905,107.5	446,237,259.2
Эзлэх хувь	50.18%	0.00%	1.41%	8.78%	13.55%	26.07%

Ковариацыг үзүүлсэн дээрх хүснэгт нь нэгдүгээр хэсэгт дурьдсан Σ матриц буюу өөрөөр хэлбэл дараах байдлаар үзүүлж болно.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.00000022 & 0.00000022 & 0.00000017 & 0.00000016 & 0.00000030 & 0.00000013 \\ 0.00000022 & 0.00000024 & 0.00000017 & 0.00000016 & 0.00000031 & 0.00000018 \\ 0.00000017 & 0.00000017 & 0.00003104 & -0.00001777 & -0.00003149 & -0.00001894 \\ 0.00000016 & 0.00000016 & -0.00001777 & 0.00002050 & 0.00001892 & 0.00001132 \\ 0.00000030 & 0.00000031 & -0.00003149 & 0.00001892 & 0.00003739 & 0.00002217 \\ 0.00000013 & 0.00000018 & -0.00001894 & 0.00001132 & 0.00002217 & 0.00003646 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 50.18\% \\ 0.00\% \\ 1.41\% \\ 8.78\% \\ 13.55\% \\ 26.07\% \end{pmatrix}$$

Багцын стандарт хазайлт нь $\sqrt{\omega^T \Sigma \omega}$ байх бөгөөд энэ нь уг жишээнд 0.00238925-тай тэнцүү байна. Эндээс 5 хувийн итгэх магадлалд хамаарах утга нь $0.00238925 \times 1.65 = 0.00394226$ болох бөгөөд 1 хоногийн дотор банкны гадаад валютын ханшийн хэлбэлзлэлээс хүлээж болзошгүй алдагдал нь нийт позицийг 0.00394226-ээр үржүүлсэнтэй тэнцүү байх буюу $6{,}747{,}317.7$ төгрөг болно. Энэ нь өөрийн хөрөнгийн 0.105 хувьтай тэнцүү байна.

Жишээ 3: Monte-Carlo аргачлал

Monte Carlo аргачлалаар аливаа санамсаргүй хэмжигдэхүүний олонлогийг өгөгдсөн үнэлгээний функцийн дагуу санамсаргүйгээр үүсгэдэг. Уг аргачлалыг ихэвчлэн санхүүгийн хэрэгслийн үнэлгээ нь үндсэн хувьсагчаасаа шугаман бус хамааралтай тохиолдолд хэрэглэдэг бөгөөд үүний үндсэн жишээ нь option хэлцэл байдаг. Манай нөхцөлд өрийн бичиг, хүү гэх мэтэд санхүүгийн уламжлагдсан хэрэгсэл гаргах буюу хэлцэл хийхгүй байгаа бөгөөд харин гадаад валютын ханшинд option хэлцэл хийх хийх явдал ажиглагдаж байгаа. Гэхдээ банкууд санхүүгийн уламжлагдсан хэлцлийг гадаад валютын ханшид хийхдээ голчлон хоёр гадаад валютуудын хооронд хийж байгаа бөгөөд төгрөг болон гадаад валютуудын хооронд хийхгүй байгаа. Option хэлцлийг төгрөг болон гадаад валютын хооронд хийсэн тохиолдолд тухайн гадаад валютыг тухайн үеийн буюу spot ханшаар үржүүлж үнэлгээ болон эрсдэлийн хэмжээг гаргаж болно. Харин хоёр гадаад валютуудын хооронд хийсэн тохиолдолд тухайлбал EUR болон USD-ийн хооронд option хэлцэл хийсэн бол зарах валютын позицийн эрсдлийг санхүүгийн шугаман хэрэгслийн эрсдлийг тооцдог байдлаар тооцоолж, харин option-ийн эрсдлийг тухайн option хэлцэлд ашиглагдсан ханшаар илэрхийлэгдэн гарах эрсдлийн хэмжээг тухайн валют төгрөгийн хоорондын spot ханшаар үржүүлэн гаргана.

Monte Carlo аргачлалын жишээ болгон шугаман бус санхүүгийн хэрэгсэл болох option хэлцлийг хоёр гадаад валютын ханшид хийсэн байдлаар энд авч үзсэн. Энэхүү жишээ нь манай нэг банкны энэ оны 6 дугаар сард хийсэн хэлцэл бөгөөд нөхцөл нь 10.0 сая EUR-г 1.234 ханштайгаар, 3 сарын хугацаатай call option зарсан. Тухайн үеийн EUR/USD ханш 1.140 байсан. Үүнд EUR/USD-ийн харьцангүй өөрчлөлтийн хэлбэлзлэлийг өмнөх хугацааны ажиглалтын утгуудаас тооцоолон гаргахад 0.000333 гарсан. Энэ хэлцэлтэй холбоотой үзүүлэлтүүдийг дор үзүүлэв.

	Тэмдэг	Өгөгд	Тайлбар

	лэгээ	лүүд	
EUR-ийн эрсдэлгүй хүүгийн түвшин	r	8%	Гадны мэдээллээс өгөгдөнө
USD-ийн эрсдэлгүй хүүгийн түвшин	R	7%	Гадны мэдээллээс өгөгдөнө
EUR/USD-ийн стандарт хазайлт	c	0.1	Мэдээлэл ашиглан тооцоолно
Spot ханш	S	1.14	Гадны мэдээллээс өгөгдөнө
Хэрэгжүүлэх ханш	X	1.234	Хэлцлийн дагуу өгөгдөнө
Хугацаа	T	3	Хэлцлийн дагуу өгөгдөнө
EUR/USD-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн стандарт хазайлт	C	0.00333	Мэдээлэл ашиглан тооцоолно

Санхүүгийн ямар хэрэгсэлд option хэлцэл хийснээс шалтгаалан option-ийн үнэлгээний функц өөр өөр байх бөгөөд энд гадаад валютын ханшид хийсэн option-ийг жишээ болгон авч байгаа тул үүнд Garman-Kohlhagen-ийн үнэлгээний функцийг ашиглана. Уг функц нь дараахь хэлбэртэй байна.

$$OptionValue = S\exp(-RT)N(d_1) - X\exp(-rT)N(d_2)$$

Үүнд:

$$d_1 = [\ln(S/X) + (r - R + 0.5c^2)T]/c\sqrt{T}$$

$$d_2 = [\ln(S/X) + (r - R - 0.5c^2)T]/c\sqrt{T}$$

Уг хэлцлийн үнэлгээний олонлогийг үүсгэхийн тулд юуны өмнө EUR/USD-ийн олонлогийг үүсгэх шаардлагатай. EUR/USD-ийн харьцангуй өөрчлөлт нь нормаль тархалттай байх тул эхлээд стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүнийг санамсаргүйгээр үүсгэнэ. Энэ жишээнд нийт 1014 удаа санамсаргүй тоо үүсгэсэн. Үүсгэсэн санамсаргүй хэмжигдэхүүн нь магадлалын утга болох тул стандарт нормаль тархалтын нягтын функцээр түүнд харгалзах хэмжигдэхүүний утгыг урвуу функц ашиглан гарган авна. (Стандарт нормаль тархалтын урвуу функцийг олох үйлдлийг хэрэглээний программ хангамжид хийж өгсөн байдаг. Тухайлбал MS-Excel-д уг үйлдлийг NORMSINV функц гүйцэтгэдэг.) Эдгээр хэмжигдэхүүн нь стандарт нормаль тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн тул EUR/USD-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн хэлбэлзэлээр нь үржүүлэн EUR/USD-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн тархалтыг гаргана. Үүнээс EUR/USD-тархалтыг гаргаж болох бөгөөд EUR/USD-ийн үүсгэсэн олонлогийг ашиглан option-ийн үнэлгээг хийнэ.

	Санамсаргүй тоо	**Стандарт нормаль тархалттай хэмжигдэхүүн**	**EUR/USD-ийн харьцангуй өөрчлөлтийн олонлог**	**EUR/USD-ийн олонлог**	**Option-ийн үнэлгээ**
	/1/	/2/=NORMSINV(/1/)	/3/=/2/x0.00333	/4/=1.140+ +1.140x/3/	/5/=Option Function(/4/)
1	0.14676	-1.05043	-0.0035	1.136009	0.093197887
2	0.352361	-0.37895	-0.00126	1.13856	0.091990711
3	0.130213	-1.12538	-0.00375	1.135724	0.093333286
4	0.03677	-1.78947	-0.00596	1.133201	0.094538605
5	0.943539	1.585194	0.005283	1.146023	0.088519586
6	0.402393	-0.24716	-0.00082	1.139061	0.091754993
7	0.809942	0.877684	0.002925	1.143335	0.089759618
8	0.994276	2.528728	0.008428	1.149608	0.086883948
9	0.956733	1.713975	0.005713	1.146512	0.088295124
10	0.585543	0.216094	0.00072	1.140821	0.090929671
11	0.807066	0.867136	0.00289	1.143295	0.089778192
12	0.458864	-0.1033	-0.00034	1.139608	0.091498161
13	0.636633	0.349472	0.001165	1.141328	0.090692968
…	…	…	…	…	…
1014	0.037046	-1.78604	-0.00595	1.133214	0.094532361

Дээрх хүснэгтийн 5 дугаар багана нь жишээн дэх option хэлцлийн үнэлгээний олонлог болно. Иймд энэхүү олонлогоос Historical Simulation аргачлалтай адилаар MS-Excel-ийн PERCENTILE функцийг ашиглан 0.05-ийн итгэх магадлалд хамаарах option-ийн үнэлгээний утгыг олно. Энэ нь манай жинээнд 0.08841 гарч байгаа бөгөөд харин эрсдэл тооцоолж байгаа хугацааны үед option-ийн үнэлгээ нь 0.09131 байгааг хялбархан тооцоолж болно. Иймд EUR/USD-ийн ханшийн хэлбэлзлэлээс шалтгаалан банк 1 сарын дотор 5 хувийн итгэх магадлалтайгаар хамгийн ихдээ 1 EUR-оос $0.09131 - 0.08841 = 0.00290$ ам. доллар алдаж болзошгүй. Иймд 10.0 сая EUR-оос 29 мянган USD алдаж болзошгүй бөгөөд үүнийг MNT-ээр илэрхийлбэл 34.0 сая төгрөг болно. Өөрөөр хэлбэл банк дээрх хэлцлийг хийснээр 1 сарын дотор 5 хувийн итгэх магадлалтайгаар хамгийн ихдээ 34.0 сая төгрөг алдаж болзошгүй байна.

Жишээ 4: Cash flow mapping

Банкны эзэмшиж байгаа санхүүгийн хэрэгслийн мөнгөн урсгал нь 5.5 сарын дараа гарах бөгөөд зохиомол хугацааг 5 болон 7 сар гэж авсан буюу эдгээр саруудад үндсэн хувьсагч (хямдруулалттай өрийн бичгийн хүү гэх мэт) зарлагдан гардаг бол энэхүү санхүүгийн хэрэгслийн эрсдэлийг тооцоолохын тулд мөнгөн урсгалын хэмжээг 5 болон 7 саруудад хувиарлах хэрэгтэй болно. Уг санхүүгийн хэрэгслийн 5.5 сарын дараа гарах мөнгөн урсгалын хэмжээ нь 1000 нэгж ба дараахь мэдээлэл өгөгдсөн байг. Үүнд:

	5 сар	**7 сар**
Хүү	6.605%	6.745%
Стандарт хазайлт	0.350%	0.490%
Хамаарал	0.9975	

6. ***Үндсэн мөнгөн урсгалд хамаарах өгөөжийг тооцоолох:*** 5 ба 7 сард харгалзах өгөөжид үндэслэн 5.5 сарын өгөөжийг шугаман хамаарлаар тооцоолно. $\frac{7-5.5}{5.5-5} = 0.75$, $\frac{5.5-5}{7-5} = 0.25$ тул энэхүү өгөөж нь $0.25 \times 6.745\% + 0.75 \times 6.605\% = 6.710\%$ байна.

7. ***Үндсэн мөнгөн урсгалын өнөөгийн үнэ цэнийг тооцоолох:*** 5.5 сарын дараахь мөнгөн урсгал нь 1000 тул үүний өнөөгийн үнэ цэнэ нь $1000 \times e^{-6.710\% \times 5.5} = 691.39$ болно.

8. ***Стандарт хазайлт тооцоолох:*** 5.5 сард харгалзах стандарт хазайлтыг 5 ба 7 сарын стандарт хазайлтуудын шугаман хамаарал байдлаар тооцоолно. Өөрөөр хэлбэл $0.350\% \times 0.75 + 0.490\% \times 0.25 = 0.455\%$ байна.

9. ***Үндсэн мөнгөн урсгалыг хуваарилах коэффициентийг тооцоолох:*** Үүнд 5.5 сард харгалзах өгөөжийн вариац болон 5 болон 7 саруудад харгалзах өгөөжийг хувиарлах коэффициентээр жигнэсэн өгөөжийн вариацууд тэнцүү байна. Хоёрдугаар хэсэгт дурьдсанаар энэ нь α гэсэн нэг үл мэдэгдэгчтэй квадрат тэгшитгэл гарна. Энэхүү жишээнд $(2.071E-06) \times \alpha^2 - (1.391E-05) \times \alpha + (3.332E-06) = 0$. Эндээс $\alpha = 0.24875$, $\alpha = 6.4677$ гэсэн 2 шийд гарах бөгөөд $0 < \alpha < 1$ байх тул $\alpha = 0.24875$ шийд нь мөнгөн урсгал хувиарлахад ашиглагдана.

10. ***Үндсэн мөнгөн урсгалыг зохиомол хугацаануудад хувиарлах:*** $\alpha = 0.24875$ нь 5.5 сард гарах мөнгөн урсгалыг 7 сард хувиарлах коэффициент болох ба 5 сард

хувиарлах коэффициент нь $1-\alpha = 1-0.24875 = 0.75124$ гэж гарна. Эндээс 5 сард гарах мөнгөн урсгал нь $691.39 \times 0.24875 = 519.4$, 7 сард гарах мөнгөн урсгал нь $691.39 \times 0.75124 = 171.9$ тус тус болно.

МОНГОЛБАНК
ХЯНАЛТ ШАЛГАЛТЫН ГАЗАР